

Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Научно-образовательный математический центр
Северо-Осетинского государственного
университета им. К. Л. Хетагурова
АО «Концерн «Созвездие»

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ
ЧТЕНИЯ – XXXVII**

**Материалы
Международной
Воронежской весенней математической школы
(30 апреля – 4 мая 2026 г.)**

Под редакцией М. Ш. Бурлуцкой



Воронеж
Издательский дом ВГУ
2026

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

Конференция поддержана Московским центром фундаментальной и прикладной математики, НОМЦ СОГУ и Воронежским госуниверситетом

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

А. В. Ильин (председатель), А. В. Боровских, И. С. Ломов, А. П. Хромов (заместители председателя), И. В. Асташова, В. И. Борисов, А. Н. Голубинский, А. В. Звягин, В. Г. Звягин, М. И. Каменский, В. А. Костин, Г. А. Курина, Л. Н. Ляхов, С. Н. Медведев, А. Б. Муравник, Е. М. Семенов, С. М. Ситник, А. П. Солдатов, С. А. Шабров, А. С. Шамаев, Э. Л. Шишкина, А. С. Бондарев (ученый секретарь)

ОРГКОМИТЕТ:

И. А. Соколов (председатель), М. Ш. Бурлуцкая, Д. В. Костин, И. С. Ломов, А. П. Хромов (заместители председателя), И. В. Асташова, А. В. Боровских, Я. М. Ерусалимский, Р. Ч. Кулаев, М. С. Никольский, И. В. Колесникова (технический секретарь)

С56

Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XXXVII : материалы Международной Воронежской весенней математической школы (30 апреля – 4 мая 2026 г.) / под ред. М. Ш. Бурлуцкой ; Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова ; АО «Концерн «Созвездие» — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2026. — 375 с.

ISBN 978-5-9273-4293-8

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с МГУ им. М. В. Ломоносова, Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН, НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова, АО «Концерн «Созвездие». Тематика охватывает широкий спектр проблем теории операторов, дифференциальных уравнений, оптимального управления, теории игр, преподавания математики в высшей и средней школе, методов математического моделирования.

УДК 517.53(97; 98)

ББК 22.16

- © Воронежский государственный университет, 2026
- © Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 2026
- © Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2026
- © НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова, 2026
- © АО «Концерн «Созвездие», 2026
- © Оформление. Издательский дом ВГУ, 2026

ISBN 978-5-9273-4293-8

Организаторы



Воронежский государственный
университет



Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова



Математический институт
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук



Московский центр
фундаментальной и прикладной
математики (математический
центр МГУ)



Научно-образовательный
математический центр
Северо-Осетинского
Государственного Университета
им. К. Л. Хетагурова



АО «Концерн «Созвездие»

Конференция проводится при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2025-345 Министерства науки и высшего образования РФ), Научно-образовательного математического центра СОГУ (соглашение № 075-02-2025-1530 Министерства науки и высшего образования РФ) и Воронежского государственного университета

Содержание

<i>Абдуллова А.Ф., Андрианова А.А.</i> О стратегии тонкой настройки для количественной оценки доменного сдвига	28
<i>Акишев Г.</i> Усеченные пространства Бесова и Лизоркина–Трибеля со смешанной гладкостью в пространстве Лоренца	29
<i>Алиев З.С., Асадов Т.Б.</i> Существование положительных и отрицательных решений нелинейной краевой задачи для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных со знакопеременной весовой функцией	32
<i>Алпамысов Д., Андрианова А.А.</i> О подходах к повышению устойчивости моделей в задаче распознавания подделок лица	33
<i>Амосов А.А., Крымов Н.Е.</i> О разрешимости одной нестандартной нелинейной краевой задачи, возникающей при гомогенизации задачи сложного теплообмена	35
<i>Андрианова А.А., Хамидуллин А.М.</i> Об использовании методов обучения с подкреплением для решения задачи оценки параметров состояния оборудования при условии ограниченности данных	37
<i>Антонов Н.А.</i> Задача Коши для уравнений с дробной производной Атанганы–Балеану–Капуто на луче в весовом пространстве Соболева	38
<i>Аралов А.В.</i> О начальной задаче для систем полулинейных дифференциальных включений дробного порядка	41
<i>Артисевич А.Е., Сташ А.Х.</i> О спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных уравнений	43
<i>Асташова И.В.</i> О применении топологических методов к исследованию качественных свойств решений нелинейных уравнений	45
<i>Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В.</i> Параболические задачи управления с выпуклыми функционалами качества общего вида	47
<i>Асхабов С.Н.</i> Обобщенный оператор Абеля на отрезке с постоянными коэффициентами	50

<i>Ахматов А.А., Буранов Ж.И., Хусанов Д.Х.</i> Прямой метод Ляпунова в моделировании свойств решений дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством	52
<i>Бабошин С.Д., Костин Д.В., Костина Т.И.</i> Численное моделирование процесса погружения сваи методом Эйлера	54
<i>Баззаев А.К.</i> О разностном решении уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах с неклассическими краевыми условиями	56
<i>Барабаш О.П., Половинкин И.П.</i> Построение разностной схемы для уравнения Ньюэлла-Уайтхеда	58
<i>Баскаков А.Г., Гаркавенко Г.В., Костина Л.Н., Ускова Н.Б.</i> О состояниях обратимости линейных отношений с компактной резольвентой	60
<i>Баскаков А.Г., Джонга Т.Л.</i> Слабо меняющиеся на бесконечности отображения и теорема о неподвижной точке	62
<i>Белаш К.В.</i> Математическая модель нейронной сети с модулирующей нейропластичности	64
<i>Бирюков А.М.</i> Необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с частными производными в классах целых по пространственным переменным функций . .	66
<i>Богатов Е.М.</i> О непараметрических статистических инструментах анализа производственных процессов . . .	67
<i>Бондарев А.С.</i> Среднеквадратичная сходимость метода Галеркина приближенного решения параболического уравнения с периодическим условием на решение . . .	69
<i>Боревич Е.З.</i> Нестационарная осесимметричная краевая задача, описывающая распределение зарядов в полупроводниках	71
<i>Бортников А.А., Стенюхин Л.В.</i> Эквидистанты и преобразования Лоренца	72
<i>Булатов Ю.Н.</i> Свойства фундаментального решения В-гиперболического оператора с дробной псевдоевклидовой размерностью	74
<i>Булинская Е.В.</i> О сетях риска	76
<i>Бутерин С.А.</i> Операторно-дифференциальные системы управления	77

<i>Бухонов Д. А.</i> О корректности применения сингулярного разложения в задаче калибровки соосности датчиков БИНС	79
<i>Бычков Е. В., Замышляева А. А., Свиридюк Г. А.</i> Задача оптимального управления для модели Буссинеска со случайными начальными данными	81
<i>Васильев В. Б., Муджстаба Явар Тарасова А. С.</i> Об условиях разрешимости одного класса дискретных уравнений . .	83
<i>Виситаева М. Б.</i> Гауссова кривизна поверхности	85
<i>Вэй Юйсюань, Чэн Хань, Левашова Н. Т.</i> Применение метода верхних и нижних решений для восстановления граничного условия периодической во времени краевой задачи	88
<i>Габдрахманова Н. Т.</i> Композиция оператора нейросетевого отображения и метода Соболя-Статникова в задачах многокритериальной оптимизации	91
<i>Гандилян В. В.</i> Об одной модели управления взаимодействия биологических сообществ	93
<i>Горелов В. А.</i> Об интегралах от произведений показательных и некоторых гипергеометрических функций	95
<i>Гоцоев С.</i> Сравнение функций Грина краевых задач	96
<i>Даник Ю. Э., Дмитриев М. Г.</i> Асимптотические приближения и некоторые алгоритмы ИИ решения задач управления	98
<i>Демченко М. Н.</i> Об ультрагиперболическом уравнении с векторным потенциалом	100
<i>Джабраилов А. Л.</i> Метод неопределенных параметров для решения и исследования дифференциальных уравнений с постоянными запаздывающими аргументами . .	102
<i>Добрынина И. В.</i> О критичности мышления в математическом образовании	104
<i>Дородный М. А.</i> Усреднение гиперболических уравнений с корректором	107
<i>Doronin A. K.</i> Spectral properties of a family of problems with involution and nonlocal boundary conditions	108
<i>Дубинский Ю. А., Зубков П. В.</i> О разрешимости интегральных тождеств на подпространствах пространства Соболева	110

<i>Егорова А.Ю., Коенков А.Н.</i> Гладкость потенциала простого слоя для параболических систем второго порядка на плоскости в пространствах Зигмунда	112
<i>Завьялова Т.В.</i> Достаточные условия устойчивости систем со случайной структурой и случайными концентрированными скачками фазовой траектории	114
<i>Задорожная Н.С.</i> Расчет фильтрационных схем методом конечных элементов	115
<i>Зайцева Н.В., Муравник А.Б.</i> Об одной краевой задаче для эллиптического дифференциально-разностного уравнения	117
<i>Загора Д.А.</i> О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях	117
<i>Зверев А.А., Шабров С.А.</i> Краевые задачи с периодическими и антипериодическими краевыми условиями и негладкими решениями	119
<i>Зверева М.Б.</i> Краевые задачи с разрывными решениями и нелинейными условиями	120
<i>Зизов В.С.</i> Операторные методы в оценках сложности клеточных схем: от функции Шеннона к топологической энтропии	122
<i>Зубова С.П., Раецкая Е.В.</i> Стабилизация сетевой управляемой системы с выходом и обратной связью	124
<i>Иванова М.С.</i> О точках бифуркации в одной задаче азимутально-угломестного метода определения координат объекта по трем реперным точкам	126
<i>Илолов М.И., Разматов Дж.Ш., Лашкарбеков С.М.</i> Об L_2 устойчивости решений линейных стохастических уравнений с запаздыванием	128
<i>Исмаилов М.И., Нуриева С.А., Джафарова С.И.</i> О разрешимости смешанной задачи для одного класса уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью	133
<i>Кабанко М.В., Наумова О.А.</i> О приближении многочленами Бесселя в гильбертовом пространстве	135
<i>Кабина Е.Н., Кунаковская О.В.</i> Программные модели в теории фазовых переходов	137
<i>Кадченко С.И., Рязанова Л.С.</i> Обратные спектральные задачи для операторов параболического типа на графезвезде с изменяющимися ребрами	139

<i>Кадченко С.И., Рязанова Л.С.</i> Обратные спектральные задачи заданные на графе-звезда с изменяющимися ребрами для оператора Даламбера	141
<i>Каримов К.Т., Фармонов Ш.Р.</i> Об одной задаче на собственные значения для уравнения смешанного типа второго рода	142
<i>Кокурин М.Ю., Пахмутов Д.А.</i> О единственности решения обратной задачи волнового зондирования в 2D	145
<i>Колесникова И.В.</i> Экстремали фредгольмова функционала с омбилической особенностью	147
<i>Корзюк В.И., Козловская И.С.</i> Первая смешанная задача в полуполосе для волнового уравнения	151
<i>Коробко Е.В.</i> О дискретном уравнении Эмдена—Фаулера второго порядка и его применении для задачи о распределении зарядных станций	153
<i>Коровина М.В., Смирнов В.Ю.</i> Правила оформления тезисов	155
<i>Костенко Е.И., Звягин А.В.</i> Задача управления для вязкоупругой модели типа Фойгта с постоянной вязкостью .	161
<i>Костерин Д.С.</i> Периодические решения одного интегродифференциального уравнения	163
<i>Костин В.А., Костин Д.В., Силаева М.Н.</i> О разрешимости одной задачи в аэродинамике.	164
<i>Кузнецов А.В.</i> Вероятностные дизъюнктивные нормальные формы: функциональный подход и меры неопределённости	165
<i>Куликов А.Н., Куликов Д.А., Фролов Д.Г.</i> Существование, устойчивость пространственно неоднородных состояний равновесия и периодических решений в краевой задаче из макроэкономики	167
<i>Кунаковская О.В., Малютин А.Р., Бухонов Д.А., Морозов А.В.</i> К 200-летию геометрии Лобачевского	169
<i>Курбанов В.М., Буксаева Л.З.</i> О скорости сходимости спектрального разложения функции из класса $H_p^\alpha(G)$ по собственным вектор-функциям оператора Дирака . . .	173
<i>Кыров В.А.</i> Нахождение множества всех автоморфизмов группы Ли как решение системы функциональных уравнений	176

<i>Левашова Н.Т.</i> Решение вида движущегося фронта начально-краевой задачи для уравнения диффузии с источниками различного типа по разные стороны фронта	178
<i>Литвинов В.Л., Литвинова К.В.</i> Об одном методе решения задачи о поперечных колебаниях балки с подвижными границами	179
<i>Лобанова Н.И., Селютин В.Д.</i> Разработка диагностических инструментов для оценки способности будущих учителей математики эффективно преподавать дифференциальные уравнения старшеклассникам в допобразовании	180
<i>Лобода Н.А., Сташ А.Х.</i> О спектрах ляпуновских показателей колеблемости и блуждаемости двумерных дифференциальных систем	183
<i>Ломовцев Ф.Е.</i> Смешанная задача для двухскоростного неоднородного модельного телеграфного уравнения с нехарактеристическими косыми производными на концах струны	185
<i>Лопухинский О.Ю.</i> Сравнительный анализ алгоритмов вычисления функции ошибок	187
<i>Лыу Т.Х.</i> О решениях одного оду четвертого порядка, допускающего представление в форме уравнения Лагранжа-Остроградского	189
<i>Ляхов Л.Н.</i> Об интегралах энергии порожденных отрицательными коэффициентами скрытой сферической симметрии	191
<i>Ляхов Л.Н., Рощупкин С.А., Калитвин В.А.</i> Представление Гельфанда—Шапиро преобразования Радона—Киприянова с отрицательным коэффициентом скрытой сферической симметрией	193
<i>Макин А.С.</i> О базисных свойствах систем корневых функций оператора типа Дирака	195
<i>Максимова Е.А.</i> О задаче Коши для одного уравнения с инволютивным отклонением	197
<i>Малютин А.Р.</i> О Математических особенностях разделения двух радио сигналов на эквидистантной молобазовой антенной решетке	199
<i>Маслов Д.А.</i> Об одной регулярно возмущенной нелинейной спектральной задаче	201

<i>Матлашова А.М.</i> Стихотворные формы как дидактический инструмент освоения правил: эффективность и методика внедрения	203
<i>Махмудов К.О., Турсунмуродова У.Х.</i> Задача Коши для эллиптического уравнения четвертого порядка	205
<i>Михайлыченко И.В., Черепова М.Ф.</i> Вторая начальная краевая задача для параболического уравнения в нецилиндрической области	207
<i>Морозов А.В., Прядиев В.Л.</i> О глобальной разрешимости волнового уравнения на геометрическом графе при второй производной в условиях трансмиссии	209
<i>Насирова Л.В.</i> О глобальной бифуркации решений одной нелинейной задачи Штурма-Лиувилля со знакопеременной весовой функцией	211
<i>Нестеров А.В.</i> Асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений колебаний с малой диссипацией в критическом случае	213
<i>Нечепоренко А.Р., Зизов В.С.</i> Применение законов масштабирования в сложных социально-экономических и образовательных системах на примере МГУ им. М.В. Ломоносова	215
<i>Никулин Е.И., Карамышев А.В.</i> О решениях с пограничным слоем в двумерной дрейфо-диффузионной модели полупроводника субдебаевских размеров	218
<i>Нижкишов В.А.</i> О некоторых свойствах дискриминантного оператора	219
<i>Нитунга П.</i> О сбалансированных ресурсных сетях с жесткими приоритетами на дугах	220
<i>Орлов А.О., Махмудов А.Р.</i> Асимптотический анализ решения типа фронта задачи для уравнения реакция-диффузия с нелинейной диффузией	222
<i>Орлов А.О., Махмудов А.Р.</i> Движение резкого фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция	224
<i>Орлов А.О., Чжусюань Сюн, Чжицян Ли, Волков В.Т.</i> Асимптотический анализ асимметричных пограничных слоев в задаче реакция-диффузия-адвекция	225
<i>Орлова Н.Р., Савин А.Ю.</i> Формула типа Атьи-Ботта-Лефшеца и её приложения к операторам с группами сдвигов	227

<i>Пархоменко В.Е.</i> Перколяционная модель надежности сети электрических распределительных станций	229
<i>Пастухов М.С., Рыжлов В.С.</i> О решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и краевыми условиями типа Дирихле-Неймана	231
<i>Пастухова С.Е.</i> Апостериорные оценки в задачах с препятствием для операторов типа $p(x)$ -Лапласиана	234
<i>Пащикова В.С.</i> Качественные свойства вероятностей перколяции на однородных деревьях Кэйли	237
<i>Перескоков А.В.</i> Об асимптотических собственных значениях оператора типа Хартри вблизи границ спектральных кластеров	239
<i>Переходцева Э.В., Золин Л.В.</i> Гидродинамико-статистические модели прогноза сильных летних осадков и опасных шквалов и смерчей по территории центрального и приволжского округов и особенности их возникновения в течение аномально теплых сезонов 2024-2025гг	241
<i>Персян Г.Г.</i> О начальной задаче для дифференциальных включений смешанного типа с запаздыванием	244
<i>Пискарев С.И.</i> Оценки скорости сходимости при дескретизации дробных уравнений	246
<i>Поздняков А.А.</i> Анализ низкочастотного спектра задачи Штурма-Лиувилля на геометрическом графе в форме сетки	247
<i>Провоторова Л.В.</i> Неравенства типа Фридрихса и их приложение к задаче Неймана	249
<i>Прокопенко О.Д.</i> О поведении решений одного нелинейного дифференциального уравнения вблизи границ области определения	251
<i>Раецкая Е.В., Чунг Л.Х.</i> Решение задачи управления с контрольной точкой для сингулярно возмущенной динамической системы в частных производных	253
<i>Райцин А.М.</i> Измерительная система повышения точности определения координат энергетического центра лазерного пучка в условиях его пространственно-угловых флуктуаций	255

<i>Расулов А.Б., Дорофеева И.Н.</i> Интегральные представления систем уравнений Коши–Римана с сильными особенностями в младших коэффициентах . . .	257
<i>Рунг Е.В.</i> О сходимости одномерной регуляризованной задачи насыщенной фильтрационной консолидации с предельным градиентом	258
<i>Рустанов А.Р., Харитонова С.В.</i> Некоторые классы конформно-рекуррентных приближенно Келеровых многообразий	260
<i>Рыжков В.С.</i> О равностоймости разложений по корневым функциям дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье	262
<i>Сабитов К.Б.</i> Задача Дирихле для гиперболического уравнения четвертого порядка	266
<i>Сакбаев В.Ж.</i> Продолжения фазовых траекторий, расширения дифференциальных операторов и приближения полугрупп	268
<i>Сафонова Т.А.</i> О формулах для сумм некоторых кратных рядов Эйлера–Загера	272
<i>Седых И.А., Макаров К.Н.</i> Влияние масштабирования и формы распределения исходных данных на результаты нечеткой кластеризации	274
<i>Сейидзаде Р.Б.</i> Глобальная бифуркация решений от бесконечности некоторых нелинеаризируемых задач на собственные значения с индефинитной весовой функцией	277
<i>Сергеев И.Н.</i> Вращательные свойства двумерных дифференциальных систем	279
<i>Сидоров Д.Н., Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.</i> Об одном подходе к исследованию линейных интегралгебраических уравнений Вольтерра с разрывными ядрами	281
<i>Смирнов В.Ю., Артёмов А.Ю.</i> Применение физкоинформированных нейронных сетей для моделирования тепловых полей	283
<i>Солнцев Ю.С.</i> О полиномах типа Эрмита–Фейера в сингулярном интегрировании	285
<i>Сорока М.С.</i> О системе функциональных включений с каузальными операторами	287
<i>Степанов А.В.</i> О существовании периодических режимов одной релейной системы управления с запаздыванием	289

<i>Стружков М.И., Звягин А.В.</i> Корректность модели движения растворов полимеров с учетом памяти движения	291
<i>Сухочева Л.И.</i> О некоторых неравенствах	292
<i>Ташпулатов С.М.</i> Спектр оператора энергии двухмагнитных систем в ферромагнетике Гейзенберга с одноионной анизотропией и с взаимодействиями ближайших и вторых соседей	294
<i>Тихонова Е.В., Бердников С.Н., Сергеева А.М.</i> Логистическая модель и программа реализации калькулятора риска метастатического поражения регионарных лимфатических узлов при меланоме кожи	296
<i>Тырсин А.Н.</i> Векторная энтропийная модель адаптивных систем	297
<i>Усков В.И.</i> Явление погранслоя в задаче Коши для вырожденного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве	298
<i>Усков Д.Г.</i> Разработка математической модели модуля мониторинга артериального давления	301
<i>Федулов Д.Д.</i> Влияние квадратичного слагаемого в нелинейности на пространственно-временную динамику непрерывной самоорганизующейся системы	303
<i>Фомин В.И.</i> О непрерывности операторных тригонометрических функций $\sin X$, $\cos X$	304
<i>Фомин В.И.</i> Об иррациональных числах	310
<i>Фролкина О.Д.</i> О дизъюнктивных континуальных семействах компактов в \mathbb{R}^N	312
<i>Фролова Е.В., Барышева И.В., Трусова Н.И.</i> Достаточное условие единственности решения интегродифференциального уравнения с частными интегралами и дробной частной производной	314
<i>Харитоновна Е.Н., Звягин А.В.</i> Корректность модели движения жидкости Бингама	316
<i>Хацкевич В.Л., Каплиева Н.А., Кузнецова Н.Н.</i> Об инвариантных характеристиках линейных нечетких дифференциальных уравнений	318
<i>Царьков И.Г.</i> Солнечность и ограниченная Δ -компактность	322
<i>Цахоев Г.С.</i> Inverse positiveness of a differential operator on a graph	325

<i>Цезан О.Б.</i> Асимптотика решений сингулярно возмущённых систем с запаздыванием: метод невырожденных преобразований	327
<i>Чжао Вэньсинь, Левашова Н.Т.</i> Устойчивость стационарного решения уравнения диффузии с разрывным источником модульного типа	329
<i>Чунжук Е.А.</i> Стационарное решение в системе быстрого и медленного уравнений при наличии разрывов	331
<i>Чураков Е.М., Голубцов П.В.</i> Взвешенное комбинирование канонической информации для оценки параметров в задачах предиктивного управления	332
<i>Чэн Хань, Вэй Юйсюань</i> Задача граничного управления для двумерного уравнения реакция-адвекция-диффузия в случае модульного разрыва адвекции . . .	334
<i>Чэн Ш.</i> Исследование асимптотик решений неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка в нерезонансном случае	336
<i>Шамолин М.В.</i> Интегрируемые многомерные системы с диссипацией	338
<i>Шананин Н.А.</i> О продолжении решений уравнений второго порядка	340
<i>Шарифзода З.И., Мухамадиев Э.М., Нуров И.Дж.</i> Топологические методы исследования периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений с параметром	342
<i>Шелковой А.Н.</i> Исследование спектральных свойств интегро-дифференциального оператора с суммируемым с квадратом ядром, определяемого нелокальными краевыми условиями	344
<i>Шшикина Э.Л.</i> Построение дробной степени оператора Лапласа-Бесселя полугрупповым методом	345
<i>Шляхтер А.Д.</i> Об алгоритмах оптимизации поиска путей в динамических графах с использованием методов теории управления	347
<i>Шорохов С.Г.</i> Функционал потерь для неоднородного гиперболического уравнения	349
<i>Яживчик Н.В.</i> Краевые задачи для одного класса нелинейных уравнений Коши–Римана с сингулярными коэффициентами в областях с кусочно-гладкими границами	351

<i>Alili V.G.</i> Schauder-Type Estimates up to the Boundary for Elliptic Operators with Constant Coefficients	352
<i>Eloeva V.A.</i> Inverse positiveness of a differential operator on a graph	354
<i>Korzyuk V.I., Rudzko J.V.</i> Classical Solution of the Second Mixed Problem for the Inhomogeneous Liouville Equation in a Half-Strip	357
<i>Kovalevsky A.A.</i> Existence and nonexistence of weak solutions for some classes of nonlinear elliptic equations with L^m -data	358
<i>Misiuk V.R.</i> On the rate of polynomial approximation of power functions in hardy and bergman spaces	362
<i>Mohammed M.A.</i> Optimization LSTM model using Functional Analytical Regeneration (FA) algorithms	363
<i>Senouci A.</i> On some generalizations of integral inequalities for quasimonotone functions in weighted variable exponent Lebesgue spaces	365
<i>Zhabborov N.M., Husenov B.E.</i> Invariance of Levels $A(z)$ -lemniscates	368

Contents

<i>Abdullova A.F., Andrianova A.A.</i> About a fine-tuning strategy for quantitative assessment of the domain shift	28
<i>Akischev G.</i> The Besov and Lizorkin–Triebel truncated spaces with mixed smoothness in the Lorentz space	29
<i>Aliyev Z.S., Asadov T.B.</i> Influence of the module of continuity of the principal coefficient on the rate of convergence of expansions in root functions of an even order operator . .	32
<i>Alpamysov D., Andrianova A.A.</i> About approaches to improving the stability of models in the face anti-spoofing problem	33
<i>Amosov A.A., Krymov N.E.</i> On the solvability of a nonstandard nonlinear boundary value problem encountered in homogenizing a complex heat transfer problem	35
<i>Andrianova A.A., Khamidullin A.M.</i> About using reinforcement learning methods to solve the problem of assessing the parameters of equipment condition under limited data conditions	37
<i>Antonov N.A.</i> Cauchy Problem for equations with the Atangana–Baleanu–Caputo fractional derivative on a half-line in a weighted Sobolev space	38
<i>Aralov A.V.</i> On the initial value problem for systems of semilinear fractional differential inclusions	41
<i>Artisevich A.E., Stash A.Kh.</i> On the spectra of oscillation exponents of linear homogeneous differential equations . .	43
<i>Astashova I.V.</i> On the application of topological methods to the study of qualitative properties of solutions of nonlinear equations	45
<i>Astashova I.V., Lashin D.A., Filinovskiy A.V.</i> Parabolic control problems with a convex quality functional of general form	47
<i>Askhabov S.N.</i> Generalized Abel operator on a segment with constant coefficients	50
<i>Akhmatov A.A., Buranov Zh.I., Khusanov D.Kh.</i> Lyapunov direct method in modeling the solutions properties of differential equations with cylindrical phase space	52
<i>Baboshin S.D., Kostin D.V., Kostina T.I.</i> One remark about the impulse immersion model	54

<i>Bazzaev A.K.</i> On the difference solution of the fractional-order diffusion equation with a fractional derivative in the least terms with non-classical boundary conditions	56
<i>Barabash O.P.</i> Construction of a difference scheme for the Newell-Whitehead equation	58
<i>Baskakov A.G., Garkavenko G.V., Kostina L.N., Uskova N.B.</i> On the states of continuous invertibility of linear relations with a compact resolvent	60
<i>Baskakov A.G., Djonga L.T.</i> Slowly Varying Maps at Infinity and Fixed-Point Theorem	62
<i>Belash K.V.</i> Mathematical model of a neural network with neuroplasticity modulation	64
<i>Biriukov A.M.</i> Necessary and sufficient conditions for the correctness of the Cauchy problem for systems of partial differential equations in the classes of functions that are entire in spatial variables	66
<i>Bogatov E.M.</i> On nonparametric statistical tools for analyzing production processes	67
<i>Bondarev A.S.</i> Root mean square convergence of the Galerkin method for the approximate solution of a parabolic equation with a periodic condition for the solution	69
<i>Borevich E.Z.</i> A non-stationary axially symmetric boundary value problem describing the charge distribution in semiconductors	71
<i>Bortnikov A.A., Stenyuhin L.V.</i> About equidistants of exponential	72
<i>Bulatov Yu.N.</i> Properties of the fundamental solution of the B-hyperbolic operator with fractional pseudo-Euclidean dimension	74
<i>Bulinskaya E.V.</i> On risk networks	76
<i>Buterin S.A.</i> Operator-differential control systems	77
<i>Bukhonov D.A.</i> On the correctness of applying singular value decomposition in the problem of calibrating the alignment of SINS sensors	79
<i>Bychkov E.V., Zamyslyayeva A.A., Sviridyuk G.A.</i> Optimal Control Problem for Boussinesq Model with Random Initial Data	81
<i>Vasilyev V.B., Mujtaba Yawar, Tarasova A.S.</i> On solvability conditions for a certain class of discrete equations	83
<i>Visitaeva M. B.</i> Gaussian curvature of a surface	85

<i>Yuxuan Wei, Han Cheng, Levashova N.T.</i> Application of the method of upper and lower solutions to the recovery of the boundary condition for a time-periodic boundary value problem	88
<i>Gabdrakhmanova N.T.</i> Composition of a neural network mapping operator and the Sobol-Statnikov method in multicriteria optimization problems	91
<i>Gandilyan V.V.</i> About one model of controlling the interaction of biological communities	93
<i>Gorelov V.A.</i> On the algebraic independence of solutions of some linear differential equations of the third order	95
<i>Gotsoev S.</i> Comparison of Green's functions for boundary value problems	96
<i>Danik Yu.E., Dmitriev M.G.</i> Asymptotic approximations and some AI algorithms for solving control problems	98
<i>Demchenko M.N.</i> On the ultrahyperbolic equation with vector potential	100
<i>Dzhabrailov A.L.</i> Uncertain parameter method for solving and studying differential equations with constant retarded arguments	102
<i>Dobrynina I.V.</i> On critical thinking in mathematical education	104
<i>Dorodnyi M.A.</i> Homogenization of hyperbolic equations with corrector	107
<i>Doronin A.K.</i> Spectral properties of a family of problems with involution and nonlocal boundary conditions	108
<i>Dubinsky Yu.A., Zubkov P.V.</i> On the solvability of integral identities on subspaces of Sobolev space	110
<i>Egorova A.Yu., Konenkov A.N.</i> Smoothness of the single layer potential for second order parabolic systems on the plane in Zygmund spaces	112
<i>Zavyalova T.V.</i> Sufficient conditions for stability of systems with random structure and random concentrated jumps .	114
<i>Zadorozhnaya N.S.</i> Calculation of filtration schemes using the finite element method	115
<i>Zaitseva N.V., Muravnik A.B.</i> On a boundary value problem for an elliptic differential-difference equation	117
<i>Zakora D.A.</i> On Volterra integro-differential equations	117
<i>Zverev A.A., Shabrov S.A.</i> Boundary value problems with periodic and antiperiodic conditions and nonsmooth solutions	119

<i>Zvereva M.B.</i> Boundary value problems with discontinuous solutions and nonlinear conditions	120
<i>Zizov V.S.</i> Operator methods for estimating the complexity of cellular circuits: from the Shannon function to topological entropy	122
<i>Zubova S.P., Raetskaya E.V.</i> Stabilization of a network-controlled system with output and feedback	124
<i>Ivanova M.S.</i> On bifurcation points in one problem of the azimuth-elevation method for determining the coordinates of an object using three reference points	126
<i>Ilov M.I., Rahmatov J.Sh., Lashkarbekov S.M.</i> On the L_2 stability of solutions to linear stochastic delay equations .	128
<i>Ismailov M.I., Nurieva S.A., Dzhafarova S.I.</i> On the solvability of a mixed problem for one class of third-order equations with a nonlinear operator right-hand side	133
<i>Kabanko M.V., Naumova O.A.</i> Approximation by Bessel orthogonal polynomials in Hilbert space	135
<i>Kabina E.N., Kunakovskaya O.V.</i> Software models in the theory of phase transitions	137
<i>Kadchenko S.I., Ryazanova L.S.</i> Inverse spectral problems for parabolic type operators on a star graph with changing edges	139
<i>Kadchenko S.I., Ryazanova L.S.</i> Inverse spectral problems for parabolic type operators on a star graph with changing edges	141
<i>Karimov K.T., Farmonov Sh.R.</i> On an eigenvalue problem for a second-kind mixed-type equation with two degeneration lines	142
<i>Kokurin M.Yu., Pakhmutov D.A.</i> On the uniqueness of the solution of the inverse problem of wave sounding in 2D . .	145
<i>Kolesnikova I. V.</i> Extremals of a Fredholm functional with an umbilical singularity	147
<i>Korziuk V.I., Kozlovskaya I.S.</i> First mixed task in half band for wave equation	151
<i>Korobko E.V.</i> On the discrete second-order Emden-Fowler equation and its application to the charging station allocation problem	153

<i>Korovina M.V., Smirnov V.Yu.</i> A method for constructing asymptotics of solutions of differential equations with meromorphic coefficients in the neighborhood of an irregular singular point using examples of equations of various orders	155
<i>Kostenko E.I., Zvyagin A.V.</i> Control problem for a viscoelastic Voigt-type model with constant viscosity	161
<i>Kosterin D.S.</i> Periodic solutions of one integro-differential equation	163
<i>Kostin V.A., Kostin D.V., Silaeva M.N.</i> On the solvability of a problem in aerodynamics	164
<i>Kuznetsov A.V.</i> Probabilistic disjunctive normal forms: functional approach and uncertainty measures	165
<i>Kulikov A.N., Kulikov D.A., Frolov D.G.</i> Existence and stability of spatially heterogeneous equilibrium states and periodic solutions in a boundary-value problem from macroeconomics	167
<i>Kunakovskaya O.V., Malyutin A.R., Bukhonov D.A., Morozov A.V.</i> On the 200th Anniversary of Lobachevsky's Geometry	169
<i>Kurbanov V.M., Buksaeva J.I.</i> About the rate of similarity of the spectral decomposition function from class $H_{p,\alpha}(G)$ by the operator's own vector-functions Dirac	173
<i>Kyrov V.A.</i> Finding the set of all automorphisms of a Lie group as a solution to a system of functional equations . .	176
<i>Levashova N.T.</i> Solution of the moving front type to the initial boundary value problem for the diffusion equation with sources of different types on different sides of the front . .	178
<i>Litvinov V.L., Litvinova K.V.</i> On a method for solving the problem of transverse vibrations of a beam with moving boundaries	179
<i>Lobanova N.I., Selutin V.D.</i> Development of diagnostic tools to assess the ability of future mathematics teachers to teach differential equations effectively to high school students in pre-exam	180
<i>Loboda N.A., Stash A.Kh.</i> On the spectra of Lyapunov exponents of oscillation and wandering of two-dimensional differential systems	183
<i>Lomovtsev F.E.</i> Mixed problem for a two-speed non-homogeneous model telegraph equation with noncharacteristic chords at the ends of the string	185

<i>Lopukhinskiy O.Yu.</i> Comparative analysis of error function computation algorithms for digital signal processing tasks	187
<i>Lyu T.H.</i> On the solutions of a fourth-order ODE that can be represented in the form of a Lagrange-Ostrogradsky equation	189
<i>Lyakhov L.N.</i> On energy integrals generated by negative coefficients of hidden spherical symmetry	191
<i>Lyakhov L.N., Roshchupkin S.A., Kalitvin V.A.</i> Gelfand—Shapiro representation of the Radon—Kipriyanov transform with a negative coefficient of hidden spherical symmetry	193
<i>Makin A.S.</i> On the basis properties of root function systems of Dirac-type operator	195
<i>Maksimova E.A.</i> On the Cauchy problem for one equation with involutive deviation	197
<i>Malyutin A.R.</i> About mathematical features separation of two radio signals by equidistant low basic antenna array	199
<i>Maslov D.A.</i> About one regularly perturbed nonlinear spectral problem	201
<i>Matlashova A.M.</i> Poetic forms as a didactic tool for mastering rules: effectiveness and implementation methodology	203
<i>Makhmudov K.O., Tursunmurodova U.Kh.</i> The Cauchy problem for a Fourth-Order Elliptic Equation	205
<i>Mikhailichenko I.V., Cherepova M.F.</i> Second initial boundary value problem for parabolic equation in a noncylindrical domain	207
<i>Morozov A.V., Pryadiev V.L.</i> On the Global Solvability of the Wave Equation on a Geometric Graph with the Second Derivative in Transmission Conditions	209
<i>Nasirova L.V.</i> Influence of the module of continuity of the principal coefficient on the rate of convergence of expansions in root functions of an even order operator	211
<i>Nesterov A.V.</i> Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of hyperbolic equations with small dissipation in the critical case	213
<i>Necheporenko A.R., Zizov V.S.</i> Application of scaling laws in complex socio-economic and educational systems: the example of Lomonosov Moscow State University	215

<i>Nikulin E.I., Karamyshev A.V.</i> On boundary-layer solutions in a two-dimensional drift-diffusion model for a sub-Debye-length semiconductor	218
<i>Nikishov V.A.</i> On some properties of the discriminant operator	219
<i>Nitunga P.</i> On balanced resourced networks with strict priorities on arcs	220
<i>Orlov A.O., Makhmudov A.R.</i> Asymptotic analysis of a front-type solution of a problem for a reaction-diffusion equation with nonlinear diffusion	222
<i>Orlov A.O., Makhmudov A.R.</i> Motion of a sharp front in a reaction-diffusion-advection problem	224
<i>Orlov A.O., Zhuxuan Xiong, Zhiqiang Li, Volkov V.T.</i> Asymmetric boundary layers in a singularly perturbed reaction-diffusion-advection problem in a two-dimensional domain	225
<i>Orlova N.R., Savin A.Yu.</i> An Atiyah-Bott-Lefschetz type formula and its applications to operators with a group of shifts	227
<i>Parhomenko V.E.</i> Percolation model of reliability of a network of electric distribution stations	229
<i>Pastuhov M.S., Rykhlov V.S.</i> On the solution of the initial boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative and boundary conditions of the Dirichlet-Neumann type	231
<i>Pastukhova S.E.</i> A posteriori estimates in obstacle problems with $p(x)$ -Laplacian type operators	234
<i>Pashkova V.S.</i> Qualitative properties of percolation probability for uniform Cayley trees	237
<i>Pereskokov A.V.</i> On asymptotic eigenvalues of a Hartree-type operator near the boundaries of spectral clusters	239
<i>Perekhodtseva E.V., Zolin L.V.</i> Hydrodynamic and statistical forecasting models heavy summer precipitation and dangerous squalls and tornadoes on the territory of the central and volga districts and the features of their occurrence in the course of the abnormally warm seasons 2024-2025	241
<i>Petrosyan G.G.</i> On the initial value problem for differential inclusions of mixed type with delay	244
<i>Piskarev S.I.</i> Estimates of the rate of convergence when discretizing fractional equations	246

<i>Pozdnyakov A.A.</i> Analysis of the Low-Frequency spectrum of the Sturm–Liouville problem on a grid-shaped metric graph	247
<i>Provotorova L.V.</i> Friedrichs type inequalities and their application to the Neumann problem	249
<i>Prokopenko O.D.</i> On the behavior of solutions to some nonlinear differential equation near domain boundaries . .	251
<i>Raetskaya E.V., Trung Le Hay</i> Solution of a control problem with a checkpoint for a singularly perturbed partial differential dynamic system	253
<i>Raitsin A.M.</i> A measuring system for increasing the accuracy of determining the coordinates of the energy center of a laser beam under conditions of its spatial-angular fluctuations .	255
<i>Rasulov A.B., Dorofeeva I.N.</i> Towards the theory of systems of Cauchy–Riemann linear equations with a strong polar singularity in the lower-order coefficients	257
<i>Rung E.V.</i> On the convergence of a one dimensional regularized problem of saturated filtration consolidation with a limiting gradient	258
<i>Rustanov A.R., Kharitonova S.V.</i> Some classes of conformally recurrent nearly Kähler manifolds	260
<i>Rykhlov V.S.</i> On the equiconvergence of expansions in root functions of a differential operator and in a trigonometric Fourier series	262
<i>Sabitov K.B.</i> The Dirichlet problem for a equation of Gabor–Sveshnikov on oscillations of a stratified liquid	266
<i>Sakbaev V.Zh.</i> Continuation of phase trajectories, extensions of differential operators and approximations of semigroups .	268
<i>Safonova T.A.</i> On formulas for sums of some multiple Euler–Sager series	272
<i>Sedykh I.A., Makarov K.N.</i> The effect of scaling and the shape of the distribution of the source data on the results of fuzzy clustering	274
<i>Seyidzade R.B.</i> Influence of the module of continuity of the principal coefficient on the rate of convergence of expansions in root functions of an even order operator . .	277
<i>Sergeev I.N.</i> Rotational properties of two-dimensional differential systems	279
<i>Sidorov D.N., Chistyakov V.F., Chistyakova E.V.</i> An approach to the study of linear Volterra integro-algebraic equations with discontinuous kernels	281

<i>Smirnov V.Yu., Artemov A.Yu.</i> Application of physics-informed neural networks to thermal field modeling	283
<i>Soliev Yu.S.</i> On Hermite-Fejer type polinomials in singular integration	285
<i>Soroka M.S.</i> On the system of functional inclusions with causal operators	287
<i>Stepanov A.V.</i> On the existence of periodic modes of one relay control system with delay	289
<i>Strukov M.I., Zvyagin A.V.</i> Correctness of motion model for polymer solutions with motion memory	291
<i>Suchocheva L.I.</i> About some inequalities	292
<i>Tashpulatov S.M.</i> Spectra of the Energy operator of the two-magnon systems in the Heisenberg Ferromagnet with one-ion anisotropy and with nearest and next-nearest neighbour interactions	294
<i>Tihonova E.V., Berdnikov S.N., Sergeeva A.M.</i> Logistic Model and Software Implementation of a Risk Calculator for Regional Lymph Node Metastases in Cutaneous Melanoma	296
<i>Tyrstin A.N.</i> Vector entropy model of adaptive systems	297
<i>Uskov V.I.</i> Boundary-layer phenomenon in the Cauchy problem for a degenerated second-order differential equation in a Banach space	298
<i>Uskov D.G.</i> Development of a Mathematical Model for an Arterial Blood Pressure Monitoring Module	301
<i>Fedulov D.D.</i> The Effect of a Quadratic Term in the Nonlinearity on the Spatiotemporal Dynamics of a Continuous Self-Organizing System	303
<i>Fomin V.I.</i> About the continuity of operator trigonometric functions $\sin X, \cos X$	304
<i>Fomin V.I.</i> About irrational numbers	310
<i>Frolkina O.D.</i> On disjoint continual families of compacta in \mathbb{R}^N	312
<i>Frolova E.V., Barysheva I.V., Trusova N.I.</i> A sufficient condition for the uniqueness of the solution of an integro-differential equation with partial integrals and a fractional partial derivative	314
<i>Kharitonova E.N., Zvyagin A.V.</i> Correctness of the Bingham fluid motion model	316
<i>Khatskevich V.L., Kaplieva N.A., Kuznetsova N.N.</i> On invariant characteristics of linear fuzzy differential equations	318
<i>Tsarkov I.G.</i> Solarity and limited Δ -compactness	322

<i>Eloeva V.A., Kulaev R.Ch.</i> Upper bounds for a lower eigenvalue of a bi-laplacian on a graph	325
<i>Tsekhon O.B.</i> On the construction of asymptotic approximations of solutions of singularly perturbed systems with delay based on non-degenerate transformations	327
<i>Zhao Wenxin, Levashova N.T.</i> Stability of a Stationary Solution of the Diffusion Equation with a Discontinuous Modulus-Type Source	329
<i>Chunzhuk E.A.</i> Stationary solution in the system of fast and slow equations with discontinuities	331
<i>Churakov E.M., Golubtsov P.V.</i> Weighted Combination of Periodic Canonical Information for Parameter Estimation in Model Predictive Control	332
<i>Cheng Han, Wei Yuxuan</i> Boundary control problem for a two-dimensional reaction-advection-diffusion equation with a modular advection discontinuity	334
<i>Cheng Sh.</i> Investigation of Asymptotics of Solutions to Second-Order Nonhomogeneous Differential Equations in the Nonresonant Case	336
<i>Shamolin M.V.</i> Integrable multidimensional dynamic systems with dissipation	338
<i>Shananin N.A.</i> On Continuation of Solutions of Second-Order Equations	340
<i>Sharifzoda Z.I., Muhamadiev E.M., Nurov I.J.</i> Topological Methods for the Study of Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations with a Parameter	342
<i>Shelkova A.N.</i> Study of spectral properties of an integro-differential operator with a square-summable kernel determined by non-local boundary condition	344
<i>Shishkina E.L.</i> Construction of a fractional power of the Laplace–Bessel operator via the semigroup method	345
<i>Shlyahter A.D.</i> On optimization algorithms of path search in dynamic graphs using control theory methods	347
<i>Shorokhov S.G.</i> Loss functional for a non-homogeneous hyperbolic equation	349
<i>Yakivchik N.V.</i> Boundary value problems for one class of nonlinear Cauchy–Riemann equations with singular coefficients in domains with piecewise smooth boundaries	351
<i>Alii V.G.</i> Schauder-Type Estimates up to the Boundary for Elliptic Operators with Constant Coefficients	352

<i>Eloeva V.A., Kulaev R.Ch.</i> Upper bounds for a lower eigenvalue of a bi-laplacian on a graph	354
<i>Korzyuk V.I., Rudzko J.V.</i> Classical Solution of the Second Mixed Problem for the Inhomogeneous Liouville Equation in a Half-Strip	357
<i>Kovalevsky A.A.</i> Existence and nonexistence of weak solutions for some classes of nonlinear elliptic equations with L^m -data	358
<i>Misiuk V.R.</i> On the rate of polynomial approximation of power functions in hardy and bergman spaces	362
<i>Mohammed M.A.</i> Optimization LSTM model using Functional Analytical Regeneration (FA) algorithms	363
On some generalizations of integral inequalities for quasimonotone functions in weighted variable exponent Lebesgue spaces Senouci A.	365
<i>Zhabborov N.M., Husenov B.E.</i> Invariance of Levels $A(z)$ -lemniscates	368

О СТРАТЕГИИ ТОНКОЙ НАСТРОЙКИ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ ДОМЕННОГО СДВИГА

А.Ф. Абдуллова, А.А. Андрианова (Казань, КФУ)
AyFAbdullova@kpfu.ru, Anastasiya.Andrianova@kpfu.ru

В трансферном обучении ([1]) существует серьёзная фундаментальная проблема — несоответствие распределений данных между исходным и целевым доменами, известное как доменный сдвиг (domain shift). Это несоответствие приводит к значительному падению производительности предобученных моделей при их применении к новым данным. Стандартным подходом к решению этой проблемы является тонкая настройка (fine-tuning), но выбор оптимального подмножества параметров для адаптации традиционно основывается на эвристиках и трудоёмком переборе, поскольку практически отсутствуют строгие метрики для количественной оценки степени доменного сдвига.

Ключевым прорывом в решении данной задачи стала возможность измерения доменного сдвига с помощью метрики Maximum Mean Discrepancy (MMD). Данная метрика, определяемая в воспроизводящем пространстве Гильберта (RKHS) как $MMD^2(P, Q) = \|\mu_P - \mu_Q\|^2$, позволяет вычислять расстояние между распределениями активаций на разных слоях нейронной сети. Это дало основание для формулировки гипотезы об иерархической природе domain shift: степень расхождения распределений систематически изменяется по глубине сети. Ранние слои, отвечающие за низкоуровневые признаки (края, текстуры), демонстрируют минимальный сдвиг, в то время как поздние слои, кодирующие семантическую информацию, подвержены максимальному сдвигу.

Для подтверждения гипотезы был разработан алгоритм, автоматически определяющий оптимальную стратегию тонкой настройки на основе количественной оценки MMD. Алгоритм принимает предобученную модель и выборки из исходного и целевого доменов, затем вычисляет профиль domain shift по всем слоям сети. Для каждого слоя l вычисляется величина $\Delta^{(l)} = MMD^2(H_S^{(l)}, H_T^{(l)})$, которая представляет собой меру различия распределений активаций между доменами. Для вычислений используется несмещенная оценка MMD с гауссовым ядром, что позволяет улавливать нелинейные различия даже на небольших выборках. Полученный про-

филь $\Delta = (\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(L)})$ нормируется, что позволяет сосредоточиться на относительных изменениях сдвига по глубине, а не на абсолютных значениях, которые могут сильно различаться в зависимости от архитектуры и размера выборки.

Далее анализируется динамика изменения профиля через дискретную производную ($\delta^{(l)} = \Delta^{(l+1)} - \Delta^{(l)}$), которая показывает, насколько усиливается доменный сдвиг при переходе к следующему слою. Положительные значения указывают на усиление сдвига и появление доменно-специфичных признаков, значения около нуля — на сохранение инвариантности.

Для автоматического выделения значимых скачков используется адаптивный порог $\tau = \mu_\delta + k\sigma_\delta$, где μ_δ и σ_δ представляют собой среднее и стандартное отклонение производных, а коэффициент k обычно равен 1.5. Такой порог балансирует между чувствительностью к изменениям и устойчивостью к случайным колебаниям. Критический слой l_c определяется как первый переход, где $\delta^{(l)} > \tau$. Этот слой отмечает границу, после которой доменный сдвиг начинает устойчиво возрастать. На основе найденной границы формируется стратегия fine-tuning: слои $\{1, 2, \dots, l_c\}$ замораживаются, а слои $\{l_c + 1, l_c + 2, \dots, L\}$ адаптируются.

Разработанный подход может решить проблему настройки готовых моделей. Вместо эвристического подбора, алгоритм на основе MMD сам анализирует, как данные «проходят» через сеть, и находит точку, где начинаются значительные различия между старыми и новыми данными. Эта точка становится границей: всё, что до неё — универсальные знания, которые можно заморозить, всё, что после — специфичные признаки, которые нужно дообучить.

Литература

1. Zhuang F. A Comprehensive Survey on Transfer Learning / F. Zhuang, Z. Qi, K. Duan, D. Xi, Y. Zhu, H. Zhu, H. Xiong, Q. He // Proceedings of the IEEE. — 2021. — Vol.109, №1. — P. 43-76.

УСЕЧЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА БЕСОВА И ЛИЗОРКИНА–ТРИБЕЛЯ СО СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

Г. Акишев (Астана, Казахстанский филиал МГУ)

akishev_g@mail.ru

Рассматривается $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — пространство Лоренца всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, которые имеют 2π -период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{L_{p,\tau}} = \left\{ \frac{\tau}{p} \int_0^1 (f^*(t))^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}}, \quad 1 < p < \infty, 1 \leq \tau < \infty,$$

конечна, $f^*(y)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$ (см. [1, с. 521]), $\bar{x} \in \mathbb{I}^m = [0, 1]^m$, $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$.

Введем обозначения: $a_{\bar{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle \bar{n}, 2\pi\bar{x} \rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, где \mathbb{Z}^m — множество точек из \mathbb{R}^m с целочисленными координатами. Положим

$$\delta_{\bar{s}}(f, 2\pi\bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, 2\pi\bar{x} \rangle}, \quad \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j, \quad s_j = 1, 2, \dots,$$

где $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\}$.

$$P_l = \{\bar{s} = (s_1, \dots, s_m) : s_j = 2^{l_j} - 1, \dots, 2^{l_j+1} - 2, j = 1, \dots, m\}.$$

Определение 1. Пусть $r_j, b_j \in \mathbb{R}$ для $j = 1, \dots, m$ и $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$, $0 < q, \theta \leq \infty$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$. $T_{\theta}^{\bar{b}} S_{p,\tau,q}^{\bar{r}} B(\mathbb{T}^m)$ — усеченное пространство Бесова со смешанной гладкостью состоит всех функций $f \in \dot{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, для которых конечна

$$\|f\|_{T_{\theta}^{\bar{b}} S_{p,\tau,q}^{\bar{r}} B} := \left(\sum_{\bar{l} \in \mathbb{N}^m} \prod_{j=1}^m 2^{l_j b_j \theta} \left(\sum_{\bar{s} \in P_{\bar{l}}} \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j q} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{L_{p,\tau}}^q \right)^{\frac{\theta}{q}} \right)^{1/\theta}.$$

Определение 2. Пусть $r_j, b_j \in \mathbb{R}$ для $j = 1, \dots, m$ и $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$, $0 < q, \theta \leq \infty$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$. Усеченным пространством Трибеля–Лизоркина со смешанной гладкостью называется множество всех функций $f \in \dot{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{T_{\theta}^{\bar{b}} S_{p,\tau,q}^{\bar{r}} F} := \left(\sum_{\bar{l} \in \mathbb{N}^m} \prod_{j=1}^m 2^{l_j b_j \theta} \left\| \left(\sum_{\bar{s} \in P_{\bar{l}}} \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j q} |\delta_{\bar{s}}(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_{p,\tau}}^{\theta} \right)^{1/\theta}$$

и обозначается символом $T_{\theta}^{\bar{b}} S_{p,\tau,q}^{\bar{r}} F(\mathbb{T}^m)$.

В случае $\tau = p$, изотропные усеченные пространства Бесова и Трибеля–Лизоркина определены и исследованы в [2]. В случае $r_1 = \dots = r_m = 0$ и $q = \theta$ пространство $T_{\theta}^{\bar{b}} S_{p,\tau,q}^{\bar{\tau}} B(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством $S_{p,\tau,\theta}^{0,\bar{b}} B(\mathbb{T}^m)$, определенного в [3].

Для $A \in \{B, F\}$ вместо $T_{\theta}^{\bar{b}} S_{p,\tau,q}^{\bar{\tau}} B(\mathbb{T}^m)$ или $T_{\theta}^{\bar{b}} S_{p,\tau,q}^{\bar{\tau}} F(\mathbb{T}^m)$ будем писать $T_{\theta}^{\bar{b}} S_{p,\tau,q}^{\bar{\tau}} A(\mathbb{T}^m)$.

Теорема 1. Пусть $A \in \{B, F\}$, $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$, $0 < \theta, q \leq \infty$ и $r_j \in \mathbb{R}$, $b_j > 0$ для $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$T_{\theta}^{\bar{b}} S_{p,\tau,q}^{\bar{\tau}} A(\mathbb{T}^m) \hookrightarrow S_{p,\tau,q}^{\bar{\tau}} A(\mathbb{T}^m) \hookrightarrow T_{\theta}^{-\bar{b}} S_{p,\tau,q}^{\bar{\tau}} A(\mathbb{T}^m),$$

левое вложение справедливо при $1 < \tau \leq q < \infty$ и $1 < p < \infty$ или $0 < q < \tau < \infty$ и $q \leq p < \infty$. Если $r_j, b_j \in \mathbb{R}$ для $j = 1, \dots, m$, то

$$T_{\theta}^{\bar{b}} S_{p,\tau,\min\{\tau,q\}}^{\bar{\tau}} B(\mathbb{T}^m) \hookrightarrow T_{\theta}^{\bar{b}} S_{p,\tau,q}^{\bar{\tau}} F(\mathbb{T}^m) \hookrightarrow T_{\theta}^{-\bar{b}} S_{p,\tau,\max\{\tau,q\}}^{\bar{\tau}} B(\mathbb{T}^m),$$

левое вложение справедливо при $1 < \tau \leq q < \infty$ и $1 < p < \infty$ или $0 < q < \tau < \infty$ и $q \leq p < \infty$, а правое вложение при $0 < q < \tau < \infty$ и $1 < p < \infty$ или $1 < p \leq q < \infty$ и $1 < \tau \leq q < \infty$.

Литература

1. Асташкин С.В. Система Радемахера в функциональных пространствах /С. В. Асташкин — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 552 с.
2. Dominguez O. Truncated smooth function spaces /O. Dominguez, S. Tikhonov // Trans. Amer. Math. Soc. —2024. —Vol. 377. — P. 8877–8934.
3. Akishev G. On embedding theorems for function spaces with mixed logarithmic smoothness /G. Akishev //Rend. Circ. Mat. Palermo, II Ser. —2025. —Vol. 74. —article 22. —P.1–24.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

З.С. Алиев., Т.Б. Асадов (Баку, БГУ)

z_aliyev@mail.ru, tofig-as@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N > 1$, – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу

$$\begin{cases} Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u = ra(x)g(u), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $i, j = \overline{1, N}$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, $c \in C(\bar{\Omega})$, $c(x) \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$, $a \in C(\bar{\Omega})$ и принимает положительные и отрицательные значения в подмножествах положительной меры, L является равномерно эллиптическим на $\bar{\Omega}$. Кроме того, τ – ненулевой вещественный параметр, а нелинейный член $g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям:

- (a) $sg(s) \neq 0$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$;
- (b) существуют ненулевые постоянные g_0 и g_∞ такие, что

$$\lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{g(s)}{s} = g_0, \quad \lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{g(s)}{s} = g_\infty. \quad (2)$$

Задача (1) возникает в популяционной генетике при моделировании динамики популяции, где Ω обозначает среду обитания вида, u представляет плотность популяции, τ^{-1} – скорость распространения популяции, $a(x)$ представляет собой внутреннюю скорость роста вида в точке x , которая отрицательна в неблагоприятных средах обитания и положительна в благоприятных, граничное условие $u = 0$ на $\partial\Omega$ указывает на то, что ни одна особь не пересекает границу $\partial\Omega$ среды обитания Ω [1].

Пусть $p > N$ фиксировано, а $\alpha \in (0, 1)$ выбрано так, что выполняется неравенство $\alpha < 1 - \frac{N}{p}$. Тогда, согласно [2, Теорема 6.2], $W^{2,p}(\Omega)$ компактно вложено в $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Пусть $E = \{u \in C^{1,\alpha} : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$ – банахово пространство, снабженное нормой $\|u\|_{1,\alpha}$. Для каждого $\nu \in \{+, -\}$ пусть $P^\nu = \{u \in E : u(x) > 0, x \in \Omega, \frac{\partial u(x)}{\partial n} < 0, x \in \partial\Omega\}$, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ обозначает дифференцирование в направлении внешней нормали к $\partial\Omega$.

Линейная спектральная задача

$$\begin{cases} Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u = \lambda ra(x)u, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

обладает положительным и отрицательным главными собственными значениями λ_1^+ и λ_1^- , соответственно, а отвечающие им собственные функции u_1^+ и u_1^- лежат в $P = P^+ \cup P^-$ [3].

Теорема 1 Пусть $g_0 > g_\infty$ и выполняется одно из следующих соотношений:

$$\frac{\lambda_1^+}{g_0} < \tau < \frac{\lambda_1^+}{g_\infty}; \quad \frac{\lambda_1^-}{g_\infty} < \tau < \frac{\lambda_1^-}{g_0}.$$

Тогда существуют решения u^+ и u^- задачи (1) такие, что $u^+ \in P^+$ и $u^- \in P^-$ соответственно.

Теорема 2. Пусть $g_0 < g_\infty$ и выполняется одно из следующих соотношений:

$$\frac{\lambda_1^+}{g_\infty} < \tau < \frac{\lambda_1^+}{g_0}; \quad \frac{\lambda_1^-}{g_0} < \tau < \frac{\lambda_1^-}{g_\infty}.$$

Тогда существуют решения u^+ и u^- задачи (1) такие, что $u^+ \in P^+$ и $u^- \in P^-$ соответственно.

Литература

1. Fleming W.H. A selection-migration model in population genetics / W.H. Fleming // J. Math. Biology — 1975. — V. 2, No. 3. — P. 219–233.
2. Adams R.A. Sobolev Spaces / R.A. Adams – New York: Academic Press, 1975. — 320 p.
3. Aliyev Z. S., Hasanova Sh. M. Global bifurcation of positive solutions from zero in nonlinearizable elliptic problems with indefinite weight / Z.S. Aliyev, Sh. M. Hasanova // J. Math. Anal. Appl. — 2020. — V. 491, No. 1. — P. 1–12.

О ПОДХОДАХ К ПОВЫШЕНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ПОДДЕЛОК ЛИЦА

Д. Алпамысов, А.А. Андрианова (Казань, КФУ)
DoAlpamysov@kpfu.ru, Anastasiya.Andrianova@kpfu.ru

Задача распознавания подделок лиц (Face Anti-Spoofing, FAS) ([1]) является важным компонентом современных биометрических систем. Модель FAS выполняет бинарную классификацию входного изображения или видеокadra на классы live (подлинное лицо) и spoof (атака). К распространённым типам атак относятся демонстрация фотографии, воспроизведение видеозаписи на экране устройства, а также использование печатных или объёмных масок. Ошибочное принятие атаки снижает безопасность системы, тогда как ложное отклонение подлинного пользователя ухудшает удобство эксплуатации. Одной из ключевых проблем FAS является междоменный сдвиг.

Под доменом понимается совокупность характеристик данных и процесса съёмки, включая тип сенсора, условия освещения, параметры сжатия и протокол записи. При переносе модели на ранее не встречавшиеся условия распределение данных изменяется, что приводит к существенному снижению точности.

Базовая постановка задачи обучения, основанная на минимизации эмпирического риска (Empirical Risk Minimization, ERM), эффективна при совпадении распределений обучающих и тестовых данных, однако в условиях междоменного сдвига часто приводит к переобучению на доменно-специфичных признаках. В современной литературе ([2]) предложен ряд методов, направленных на повышение устойчивости моделей к междоменному сдвигу.

В данной работе рассматриваются четыре подхода, относящиеся к задачам «domain generalization»: Invariant Risk Minimization (IRM), MixStyle, SA-FAS (Separability and Alignment) и Instance-Aware Domain Generalization (IADG). Эти методы воздействуют на различные аспекты устойчивости модели. IRM формализует требование инвариантности решающего правила между доменами. Метод MixStyle моделирует междоменную вариативность посредством смешивания статистик признаков, что позволяет расширить стилевое разнообразие обучающих данных. Метод SA-FAS объединяет контрастивную разделимость представлений и согласование решающей поверхности между доменами. Подход IADG ориентирован на специфику задачи FAS и подавляет стилевые корреляции на уровне отдельных экземпляров данных. Сравнительный анализ показывает, что каждый из методов решает лишь часть проблемы доменного обобщения. IRM обеспечивает инвариантность классификационного решения, но не контролирует стилевую вариативность признаков. MixStyle эффективно расширяет пространство стилевых вариаций, однако не гарантирует согласованности решающей поверхности. SA-FAS улучшает геометрию представления и согласование классификаторов между доменами, тогда как IADG обеспечивает наиболее предметно-ориентированное подавление стилевой чувствительности признаков.

На основе проведённого анализа предложен гибридный подход, объединяющий несколько механизмов повышения устойчивости. В нем итоговая функция оптимизации модели определяется как сумма базовой функции потерь бинарной классификации и дополнительных регуляризаторов:

$$L = L_{cls} + \lambda_1 L_{AIAW} + \lambda_2 L_{align} + \lambda_3 L_{SupCon},$$

где L_{AIAW} реализует подавление стилевой чувствительности признаков на основе идей IADG, L_{align} обеспечивает согласование решающего правила между доменами по аналогии с IRM, а L_{SupCon} усиливает разделимость классов в пространстве признаков. Дополнительно может применяться аугментация признаков MixStyle, моделирующая междоменный сдвиг.

Предложенный подход объединяет несколько взаимодополняющих механизмов повышения устойчивости. Предполагается, что совместное использование этих компонентов позволит повысить переносимость моделей распознавания атак предъявления на ранее невидимые условия съёмки.

Литература

1. Yu Z. Deep learning for face anti-spoofing: a survey / Z. Yu, Y. Qin, C. Zhao, Z. Lei, G. Zhao // arXiv preprint. — 2021. — URL: <https://arxiv.org/abs/2106.14948> (дата обращения: 10.03.2026).

2. Wang J. Generalizing to unseen domains: a survey on domain generalization/ J. Wang, C. Lan, C. Liu, Y. Ouyang, T. Qin, W. Lu, Y. Chen, W. Zeng, P.S. Yu// IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. — 2023. — Vol. 35, №8. — P. 8052-8072.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕСТАНДАРТНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ГОМОГЕНИЗАЦИИ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА¹

А.А. Амосов, Н.Е. Крымов (Москва, НИУ МЭИ)

AmosovAA@mpei.ru, KrymovNY@mpei.ru

Во многих физических и инженерных приложениях возникает задача изучения процесса радиационно-кондуктивного теплообмена. Тепловое излучение нелинейным образом зависит от температуры, а его распространение описывается интегро-дифференциальными уравнениями. Это приводит к разнообразным нестандартным нелинейным нелокальным краевым задачам [1–4].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта государственного задания № FSWF-2026-0010.

© Амосов А.А., Крымов Н.Е., 2026

Настоящая работа посвящена доказательству разрешимости нестандартной нелинейной краевой задачи

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u &= f^\varepsilon; \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon; \\ \varepsilon D_n u - \alpha\varepsilon^2 D_s^2 k(u) + g(u) &= w^\varepsilon, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon; \\ 2\alpha\varepsilon \widehat{D}_n k(u) + \widehat{g}(u) &= \widehat{w}^\varepsilon, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \end{aligned}$$

возникающей при гомогенизации задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в системе абсолютно черных стержней круглого сечения.

Здесь $0 < \varepsilon$ — малый параметр; $\Omega_\varepsilon = (\varepsilon/2, 1 - \varepsilon/2)^2$; Γ_ε — граница квадрата Ω_ε ; γ_ε — множество его угловых точек; D_n, D_s — производные по нормали и касательному направлению к Γ_ε .

Ключевой особенностью рассматриваемой задачи, в отличие от задачи, рассмотренной в [3], является отсутствие монотонности в дифференциальном операторе задачи.

Установлены существование и единственность обобщенного решения и доказана теорема сравнения.

Литература

1. Кремкова А.А. Полудискретные и асимптотические аппроксимации задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в двумерной периодической структуре // Вестник МЭИ. 2012. № 6. С. 151—161.
2. Amosov A.A. Discrete and Asymptotical Approximations for One Stationary Radiative-conductive Heat Transfer Problem / A.A. Amosov, N.E. Krymov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2020. V. 35(3). Pp. 127—141.
3. Amosov A.A. On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer / A.A. Amosov, N.E. Krymov Problems. // J. Math. Sci. 2020; 244(3) : 357—377.
4. Amosov A.A. On a Nonlinear Initial-boundary Value Problem with Venttsel Type Boundary Conditions Arizing in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems / A.A. Amosov, N.E. Krymov // Mathematics. 2022. V. 1890(10). P. 1—23.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ

ОБОРУДОВАНИЯ ПРИ УСЛОВИИ ОГРАНИЧЕННОСТИ ДАННЫХ

А.А. Андрианова, А.М. Хамидуллин (Казань, КФУ)
Anastasiya.Andrianova@kpfu.ru, AmMKhamidullin@kpfu.ru

В условиях дефицита реальных данных об отказах промышленного оборудования традиционные методы предиктивной аналитики оказываются малоэффективными. Особенно остро эта проблема стоит в критически важных отраслях, таких как энергетика, где последствия аварий могут быть катастрофическими. Для решения задачи оценки и управления состоянием оборудования в таких условиях выбран подход на основе обучения с подкреплением ([1], дополненный синтетической генерацией данных и использованием больших языковых моделей как источника экспертного знания.

В качестве объектов для экспериментов выбраны воздушные линии электропередачи (ВЛЭП), состояние которых описывается через четыре компонента: состояния изоляторов, проводов, опор и трассы. Каждому компоненту ставится в соответствие нормализованная оценка в диапазоне $[0, 1]$, получаемая либо по чек-листам визуального осмотра, либо по данным датчиков. При отсутствии реальных данных применяется синтетическая генерация начальных состояний на основе равномерного распределения.

Многофакторная система оценки (МСО) объединяет частные оценки компонентов в единую обобщённую оценку надёжности. Используется гибридный подход: 25% — линейная взвешенная сумма и 75% — нелинейное произведение скорректированных вероятностей работоспособности. Веса компонентов (изоляторы — 0.41, провода — 0.29, опоры — 0.16, трасса — 0.14) определены методом анализа иерархий ([2]) и отражают их критичность для общей надёжности системы.

Для принятия решений об оценке необходимости ремонта применён алгоритм Deep Recurrent Q-Network (DRQN), учитывающий временную природу износа. Агент обучается с ϵ -жадной политикой, оптимизатором AdamW и функцией потерь Huber, что обеспечивает устойчивость к шуму и эффективность при редких, но значимых событиях, таких как аварии.

Разработаны две версии среды: правилopodobная (с детерминированной динамикой и стохастичностью только в авариях) и LLM-

ассистированная. Вторая реализована на базе Qwen3-4B-Instruct и способна генерировать экспертоподобные переходы и рекомендации.

Сравниваются две модели — обычная DRQN, обрабатывающая окна состояний фиксированной длины и сбрасывающая скрытые состояния LSTM, и расширенная DRQN-ReplayBPTT, которая явно сохраняет и передаёт состояния (h, c) между шагами.

Эксперименты показали, что обе модели обучаются успешно, но DRQN-ReplayBPTT демонстрирует на 15-20% меньше аварий и более стабильную совокупную награду. Это связано с её способностью учитывать долгосрочную динамику износа, в отличие от DRQN, ограниченной 12-месячным окном. Подтверждена эффективность синтетической предзаписи и применимость подхода в условиях полного отсутствия реальных данных.

Предложенный подход позволяет эффективно управлять состоянием оборудования даже при отсутствии исторических данных об отказах. Модель DRQN-ReplayBPTT, сохраняющая скрытые состояния LSTM, показывает преимущество в учёте многолетних трендов и принятии более обоснованных решений. Интеграция LLM открывает путь к использованию неявного экспертного знания, а синтетическая генерация траекторий решает проблему «холодного старта». В перспективе возможна интеграция компьютерного зрения для автоматического формирования вектора состояния по изображениям, что позволит построить сквозной автономный цикл диагностики и принятия решений.

Литература

1. Трушин С.М. Сравнительный анализ методов обучения с учителем, без учителя и обучения с подкреплением: области применения и ограничения / С.М. Трушин, В.И. Трушина. — Интернаука. — 2024. — №43-1 (360). — С. 47-52.
2. Саати, Т. Метод анализа иерархий / Т. Саати. — М.: «Радио и связь», 1993. — 278 с.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ АТАНГАНЫ-БАЛЕАНУ-КАПУТО НА ЛУЧЕ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Н.А. Антонов (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)

antonovna@my.msu.ru

Дифференциальные уравнения с дробной производной моделируют явления с памятью в вязкоупругости, биологии и аномальной диффузии [1–3]. Классические ядра Римана-Лиувилля и Капуто слабо сингулярны; чтобы избежать этого, Атангана и Балеану ввели операторы с регулярным ядром Миттаг — Леффлера [4]. Качественные свойства дробных уравнений активно изучаются [5–6]; существование и устойчивость решений с АВС-производной на конечном отрезке получены в [7], а в [8–9] автором доказаны эквивалентная интегральная формулировка, априорные оценки, непрерывная зависимость от данных и параметра. Константы в этих оценках экспоненциально растут по T и не позволяют перейти к пределу $T \rightarrow +\infty$. Переход к весовому пространству Соболева $H_\lambda^1(\mathbb{R}_+)$ с весом $e^{2\lambda x}$ снимает это ограничение. Похожие конструкции для АВС-оператора рассматривались в [10], однако задача Коши на \mathbb{R}_+ для них не изучалась.

Определение. *Весовым пространством Соболева $H_\lambda^1(\mathbb{R}_+)$, где $\lambda > 0$, называется гильбертово пространство функций $v \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+)$ со слабой производной v' , снабжённое нормой*

$$\|v\|_{H_\lambda^1}^2 := \int_0^{+\infty} (|v(x)|^2 + |v'(x)|^2) e^{2\lambda x} dx.$$

Определение. Для $\alpha \in (0, 1)$ и $v \in H_\lambda^1(\mathbb{R}_+)$ АВС-производной называется (при условии $B(0) = B(1) = 1$)

$$({}_0^{ABC}D^\alpha v)(t) := \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t E_\alpha\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)^\alpha\right) v'(s) ds.$$

Рассматривается задача Коши на полуоси:

$$v'(t) + ({}_0^{ABC}D^\alpha v)(t) = f(t, v(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Теорема. Оператор $(\mathcal{F}v)(t) := \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t E_\alpha\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)^\alpha\right) v(s) ds$ ограничен на $L_\lambda^2(\mathbb{R}_+)$, причём

$$\|\mathcal{F}v\|_{L_\lambda^2(\mathbb{R}_+)} \leq K_\alpha^\lambda \|v\|_{L_\lambda^2(\mathbb{R}_+)}, \quad K_\alpha^\lambda := \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\xi^\alpha\right) e^{-\lambda\xi} d\xi,$$

и $K_\alpha^\lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Теорема. Пусть $v_0 \in \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Функция $v \in H_\lambda^1(\mathbb{R}_+)$ является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда

$$v(t) = v_0 \left(1 + \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \Psi(t)\right) - (\mathcal{F}v)(t) + \int_0^t f(s, v(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\Psi(t) = \int_0^t E_\alpha(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\xi^\alpha) d\xi$.

Теорема. Пусть f непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой $L \geq 0$, и пусть $f(\cdot, 0) \in L_\lambda^2(\mathbb{R}_+)$. Если $\lambda > L$ и $L/\lambda + K_\alpha^\lambda < 1$, то задача (1) имеет единственное решение $v \in H_\lambda^1(\mathbb{R}_+)$. Условие выполняется при любом $L \geq 0$ при достаточно большом λ .

Теорема. В условиях предыдущей теоремы

$$\|v\|_{L_\lambda^2(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{|v_0| C_0 + \|f(\cdot, 0)\|_{L_\lambda^2(\mathbb{R}_+)}}{1 - L/\lambda - K_\alpha^\lambda},$$

где $C_0 = C_0(\alpha, \lambda)$ явно выражается через $B(\alpha)$ и Ψ и конечна при $\lambda > 0$. В отличие от [8, теорема 3], оценка равномерна на всём \mathbb{R}_+ .

Теорема. Пусть $v, w \in H_\lambda^1(\mathbb{R}_+)$ — решения задачи (1) с начальными значениями v_0, w_0 и правыми частями $f(t, v)$, $f(t, w) + r(t)$, $r \in L_\lambda^2(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\|v - w\|_{L_\lambda^2(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{|v_0 - w_0| C_0 + \|r\|_{L_\lambda^2(\mathbb{R}_+)}/\lambda}{1 - L/\lambda - K_\alpha^\lambda}.$$

Теорема. Пусть $g(t, v, \delta)$ липшицева по v с константой L и по δ с константой $Q \geq 0$, и $v_i \in H_\lambda^1(\mathbb{R}_+)$ — решение (1) с $f = g(\cdot, \cdot, \delta_i)$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\|v_1 - v_2\|_{L_\lambda^2(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{Q |\delta_1 - \delta_2|}{\lambda(1 - L/\lambda - K_\alpha^\lambda)}.$$

Литература

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations // Mathematics in Science and Engineering. — vol. 198. — Academic Press, New York. — 1999.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations // Elsevier. — Amsterdam. — 2006.
3. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. — Berlin: Springer. — 2010.
4. Atangana A., Baleanu D. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and applications to heat transfer model // Therm. Sci 20(2). — pp. 763–769. — 2016.
5. Astashova I. On asymptotic behavior of solutions to a quasi-linear second order differential equation // Functional Differential Equations. — 2009. — Vol. 16(1). — P. 93–115.

6. Srivastava S., Dey R., Domoshnitsky A., Padhi S. Existence of solution for higher order nonlinear Caputo fractional differential equation with nonlinear growth // *Differential Equations & Applications*. — 2024. Vol. 16(3) — P. 199–213.

7. Sutar S. T., Kucche K. D. Existence and data dependence results for fractional differential equations involving Atangana–Baleanu derivative // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. — 2021. — Vol. 71. — P. 647–663.

8. Антонов Н. Непрерывная зависимость и оценки решений для уравнений с дробной производной Атанганы–Балеану–Капуто // *Вестник Самарского университета*. — Естественнонаучная серия. — 2026. Т. 32, № 1.

9. Антонов Н. Применение метода Пикара к решению задачи Коши для некоторых дробных дифференциальных уравнений // *Итоги науки и техники. Сер.: — Современная математика и её приложения*. — 2025. Т. 293, № 6. С. 741–746.

10. Al-Refai M. On weighted Atangana-Baleanu fractional operators // *Advances in Differential Equations*. — No. 3. — 2020.

О НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А.В. Аралов (Воронеж, ВГПУ)

aralow0906@yandex.ru

Пусть E_i , $i = 1, \dots, n$, — сепарабельные банаховы пространства,

$$\mathcal{E} = E_1 \times \dots \times E_n, \quad \|x\|_{\mathcal{E}} = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_{E_i}.$$

Рассматривается система дифференциальных включений

$$D_0^{\alpha_i} x_i(t) \in A_i x_i(t) + F_i(t, x(t)), \quad t \in [0, a], \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = x_{0,i} \in E_i, \quad x'_i(0) = x_{1,i} \in E_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $D_0^{\alpha_i}$ — дробные производные Герасимова–Капуто порядков $\alpha_i \in (1, 2)$. Предполагается, что для каждого $i = 1, \dots, n$ операторы

$A_i : D(A_i) \subset E_i \rightarrow E_i$ являются линейными замкнутыми, порождающими равномерно ограниченными сильно непрерывными семействами косинус оператор-функций $\{C_i(t)\}_{t \in [0, a]}$. Мультиоператоры $F_i : [0, a] \times \mathcal{E} \rightarrow E_i$ удовлетворяют следующим условиям:

(H1) для каждого $x \in \mathcal{E}$ мультифункция $t \mapsto F_i(t, x)$, $t \in [0, a]$, допускает измеримый селектор;

(H2) для п.в. $t \in [0, a]$ отображение $x \mapsto F_i(t, x)$ п.н.св. и принимает непустые компактные выпуклые значения;

(H3) для каждого $r > 0$ существуют функции $\omega_{i,r} \in L_+^\infty[0, a]$, такие, что из неравенства $\|x\|_{\mathcal{E}} \leq r$ следует, что

$$\|F_i(t, x)\|_{E_i} := \sup\{\|y\|_{E_i} : y \in F_i(t, x)\} \leq \omega_{i,r}(t), \quad \text{п.в. } t \in [0, a];$$

(H4) существуют функции $k_i \in L_+^\infty[0, a]$, такие, что для любого ограниченного множества $Q \subset \mathcal{E}$

$$\chi_{E_i}(F_i(t, Q)) \leq k_i(t)\chi_{\mathcal{E}}(Q), \quad \text{п.в. } t \in [0, a],$$

где χ_{E_i} – меры некомпактности Хаусдорфа в пространствах E_i , Q_i – проекции множества Q на E_i .

Определение 1. *Интегральным решением задачи (1)–(2) на промежутке $[0, \tau]$, $\tau \in (0, a]$, называется функция $x = (x_1, \dots, x_n) \in C([0, a]; \mathcal{E})$, такая, что*

$$x_i(t) = G_i(t)x_{0,i} + K_i(t)x_{1,i} + \int_0^t (t-s)^{q_i-1} T_i(t-s) f_i(s) ds, \quad t \in [0, \tau],$$

где $q_i = \alpha_i/2$, G_i , K_i , T_i – оператор-функции специального вида, определенные на основе семейств $\{C_i(t)\}_{t \in [0, a]}$ и $f_i(s) \in F_i(t, x(t))$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (H1)–(H4). Тогда существует $\tau \in (0, a]$, такое, что множество всех интегральных решений задачи (1)–(2) на отрезке $[0, \tau]$ непустое подмножество пространства $C([0, \tau], \mathcal{E})$.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (H1), (H2), (H4) и существуют функции $\alpha_i \in L_+^\infty[0, a]$, такие, что*

$$\|F_i(t, x)\|_{E_i} \leq \alpha_i(t)(1 + \|x_i\|_{\mathcal{E}})$$

для всех $x \in \mathcal{E}$ и п.в. $t \in [0, a]$. Тогда множество всех интегральных решений задачи (1)–(2) на отрезке $[0, a]$ непустое и компактное подмножество пространства $C([0, a], \mathcal{E})$.

Литература

1. Борисович Ю.Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М. : Либроком — 2016. — 224 с.

2. Kamenskii M. On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Fixed Point Theory. — 2017. — Vol. 18, № 1. — P. 269–292.

3. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin–New York : Walter de Gruyter, — 2001. — 242 с.

О СПЕКТРАХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹

А.Е. Артисевич, А.Х. Сташ (Майкоп, АГУ)
artisevichangela@gmail.com, aidamir.stash@gmail.com

Для заданного натурального $n > 1$ рассмотрим множество \mathcal{E}^n линейных однородных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых наборами *непрерывных* функций $a \equiv (a_1, \dots, a_n) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$. Для произвольного решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ любого уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ определены (нижняя и верхняя) характеристические частоты нулей $\hat{\omega}^0(y)$, $\hat{\omega}^0(y)$ (см. [1]), (нижний и верхний) слабые показатели колеблемости нулей $\hat{\nu}_\circ^0(y)$, $\hat{\nu}_\circ^0(y)$ (см. [2]) и (нижний и верхний) сильные показатели колеблемости нулей $\hat{\nu}_\bullet^0(y)$, $\hat{\nu}_\bullet^0(y)$ (см. [2]).

Спектры (т. е. множества различных значений на ненулевых решениях) характеристических частот нулей и показателей колеблемости нулей линейных однородных дифференциальных уравнений не ниже второго порядка изучены в работах [1–5].

Спектры характеристик колеблемости нулей дифференциальных уравнений до второго порядка включительно состоят из одного неот-

¹ Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 075-03-2026-395).

© Артисевич А.Е., Сташ А.Х., 2026

рицательного числа (см. [1,2]). Оказалось, что это свойство имеет место и для уравнений Эйлера любого порядка.

Теорема 1. *Для любого ненулевого решения уравнения Эйлера*

$$(pt + q)^n y^{(n)} + a_1(pt + q)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(pt + q)\dot{y} + a_n y = 0,$$

где $p, q > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ — коэффициенты уравнения, показатели колеблемости равны нулю.

Возможность реализации бесконечных всюду разрывных спектров показателей колеблемости нулей гарантируют следующие две теоремы.

Теорема 2. *Для любых $n \geq 3$ и непустого не более чем счетного множества S неотрицательных чисел существует такое уравнение $a \in \mathcal{E}^n$, что справедливы равенства*

$$\omega^0(\mathcal{S}_*(a)) = \nu^0(\mathcal{S}_*(a)) = S \cup \{0\},$$

причем

$$\tilde{\omega}^0(y) = \hat{\omega}^0(y) = \check{\nu}_\circ^0(y) = \hat{\nu}_\circ^0(y) = \check{\nu}_\bullet^0(y) = \hat{\nu}_\bullet^0(y), \quad y \in \mathcal{S}_*(a).$$

Теорема 3. *Для любого $n > 2$ существует такое уравнение $a \in \mathcal{E}^n$, что справедливы равенства*

$$\hat{\nu}^0(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\omega}^0(\mathcal{S}_*(a)) = ([0, 1] \cap \mathbb{I}) \cup \{0\},$$

причем

$$\hat{\nu}_\circ^0(y) = \hat{\nu}_\bullet^0(y) = \hat{\omega}^0(y), \quad y \in \mathcal{S}_*(a).$$

Литература

1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И.Н. Сергеев // Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2006. — Вып. 25. — С. 249–294.
2. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Известия РАН. Серия математическая. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172.
3. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений / А.Х. Сташ // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1418–1422.
4. Войделевич А.С. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков

линейных дифференциальных уравнений /А.С. Войделевич //Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. — 2015. — № 3. — С. 17–23.

5. Сташ А.Х. О бесконечных спектрах показателей колеблемости линейных дифференциальных уравнений третьего порядка / А.Х. Сташ // Известия вузов. Математика. — 2024. — № 4. — С. 47–66.

О ПРИМЕНЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.¹

И. В. Асташова (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова,
РЭУ имени Г.В. Плеханова)
ast.diffiety@gmail.com

Обсуждается применение топологических методов исследования динамических систем к изучению качественных и асимптотических свойств решений и их классификации для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка типа

$$y^{(n)} = p(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) |y|^k \operatorname{sign} y, \quad (1)$$

а также его частного случая

$$y^{(n)} = p_0 |y|^k \operatorname{sign} y. \quad (2)$$

Для уравнений, однородных относительно решения и его производных, известно, что любое решение при умножении на константу остаётся решением, а введение новой неизвестной функции $u = y'/y$ позволяет понизить порядок уравнения. При этом последнее соотношение для решений, отличающихся постоянным множителем, даёт одну и ту же функцию.

Уравнение (2) не является однородным, однако справедлива следующая простая

Лемма. Если $y(x)$ — решение уравнения (2), то и функция

$$z(x) = A y(Bx + C), \quad (3)$$

где A, B, C — некоторые постоянные, связанные соотношением $|A|^{k-1} = B^n$, также является решением уравнения (2).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 25-11-00133).
© Асташова И.В., 2026

С помощью этой леммы можно показать, что функции, заданные формулами $u_j = y^{(j)}y^{-\beta_j}$, $j = 1, \dots, n - 1$, для решений, связанных соотношением (3), совпадают (с точностью до линейного преобразования независимой переменной) при следующем выборе констант-показателей: $\beta_j = 1 + j(k - 1)/n$. Попытка переписать уравнение (2) в виде системы 1-го порядка относительно функций u_j оказывается успешной при специальной интегральной замене независимой переменной.

Оказывается, что непосредственно вычисляемому степенному решению уравнения (2), имеющему вертикальную асимптоту, соответствует неподвижная точка полученной динамической системы. Известная гипотеза Кигурадзе об асимптотически степенном характере решений уравнений типа Эмдена – Фаулера, имеющих вертикальную асимптоту («blow-up» решений) (см. [1]) сводится к вопросу о стремлении к неподвижной точке всех траекторий динамической системы с положительными начальными условиями (см. [2]).

Описанная динамическая система в \mathbb{R}^{n-1} позволяет исследовать решения уравнения (2) и, с некоторыми оговорками, уравнения (1) только на участках их знакопостоянства.

Однако можно ввести функции, аналогичные u_j , с какой-либо производной в отрицательной степени, что позволяет исследовать участки знакопостоянства этой производной решения. Объединяя такие системы функций, можно получить атлас карт на гладком компактном многообразии, диффеоморфном гиперсфере S^{n-1} , а также динамическую систему на нём.

Эта система позволяет доказывать существование кнезеровских и колеблющихся решений рассматриваемых уравнений, а также изучать их свойства и получать асимптотическую классификацию решений. Кроме этого, удалось доказать справедливость гипотезы Кигурадзе для слабо нелинейных уравнений произвольного порядка и показать, что для сильно нелинейных уравнений множество данных Коши, порождающих асимптотически степенные blow-up решения, имеет меру нуль (см. [3]).

Будут обсуждаться нерешенные задачи, связанные с изучением качественных и асимптотических свойств решений уравнений (1) и (2).

Литература

1. Кигурадзе И. Т. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. /И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия — М.: Наука, 1990, —432 с.

2. Астахова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / И.В. Астахова (ред.) В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Научное издание под ред. И.В. Астаховой. С. 22–288, 2012, М.: ЮНИТИ-ДАНА.

3. Astashova I. V. Atypicality of asymptotically power singular solutions to Emden–Fowler type equations of order up to 100000 / I. V. Astashova, A. M. Astashov // Journal of Mathematical Sciences. — 2025. — Vol. 294, № 1. — P. 11–18.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ВЫПУКЛЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ КАЧЕСТВА ОБЩЕГО ВИДА¹

И.В. Астахова¹, Д.А. Лашин²,

А.В. Филиновский³ (¹Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова,
²РЭУ им. Г.В. Плеханова, ³Москва, ООО «ФИТО»,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, МГУ им. М.В. Ломоносова)

¹*ast.diffiety@gmail.com*, ²*dalashin@gmail.com*, ³*flnv@yandex.ru*

Мы изучаем параболическую экстремальную задачу:

$$u_t = (a(x, t)u_x)_x + b(x, t)u_x + p(x, t)u, \quad (1)$$

$$(x, t) \in Q_T = (0, 1) \times (0, T), \quad T > 0,$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

при достаточно гладких на \overline{Q}_T функциях a , b и p , $0 < a_0 \leq a(x, t)$, начальные и граничные функции предполагаются принадлежащими следующим классам: $\varphi \in W_2^1(0, T)$, $\psi \in W_2^1(0, T)$, $\xi \in L_2(0, 1)$. Мы управляем температурой φ на левом конце интервала (при фиксированных функциях ψ , ξ) и контролируем изменение температуры $u(x_0, \cdot)$ в фиксированной точке $x_0 \in (0, 1)$ на заданном интервале времени с помощью некоторого функционала. Эта экстремальная задача с точечным наблюдением (в терминологии [1]) обобщает задачу управления микроклиматом, возникающую в модели обогрева промышленных теплиц (см. [2, 3]).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, (проект № 25-11-00133).

© Астахова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В., 2026

Здесь мы расширяем наше исследование на выпуклые функционалы общего вида и более общее уравнение (с переменным коэффициентом a , конвективным членом b и обедняющим потенциалом p).

Определение 1. ([4]) Пространством $V_2^{1,0}(Q_T)$ называется банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)}$$

таких, что $t \mapsto u(\cdot, t)$ является непрерывным отображением $[0, T] \rightarrow L_2(0, 1)$.

Определение 2. Множеством $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ назовем множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x, T) = 0$ и $\eta(0, t) = 0$.

Определение 3. Слабым решением задачи (1) — (3) называется функция $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющая условию $u(0, t) = \varphi(t)$ и интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} (a(x, t)u_x\eta_x - b(x, t)u_x\eta - p(x, t)u\eta - u\eta_t) dx dt \\ & = \int_0^1 \xi(x)\eta(x, 0) dx + \int_0^T a(1, t)\psi(t)\eta(1, t) dt \end{aligned}$$

для всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$.

При сделанных выше предположениях каждое слабое решение в $W_2^{1,0}(Q_T)$ принадлежит $V_2^{1,0}(Q_T)$ ([4], гл. 3, п. 3).

Теорема 1. ([2,3]) *Задача (1) — (3) имеет единственное слабое решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, и выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C_1 (\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)}),$$

при этом константа C_1 не зависит от φ , ψ и ξ .

Обозначим через u_φ слабое решение задачи (1) — (3) с заданными функциями $\psi \in W_2^1(0, T)$ и $\xi \in L_2(0, 1)$ и функцией управления $\varphi \in W_2^1(0, T)$.

Пусть $F: L_2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $F(y) \geq C_2$ для любого $y \in L_2(0, T)$ и некоторого C_2 ;
- 2) отображение $y \mapsto F(y)$ непрерывно в нуле, т.е. для любой последовательности $\{y_k\}$, $y_k \in L_2(0, T)$ такой, что $\|y_k\|_{L_2(0,T)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, мы имеем $F(y_k) \rightarrow 0$;

3) F удовлетворяет условию строгой выпуклости: для любых $y_1 \neq y_2 \in L_2(0, T)$ и $\alpha \in (0, 1)$ выполняется

$$F(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) < \alpha F(y_1) + (1 - \alpha)F(y_2).$$

Качество управления контролируется функционалом

$$J(\varphi) = F(u_\varphi(x_0, \cdot)), \quad x_0 \in (0, 1).$$

Для замкнутого выпуклого множества управлений $\Phi \subset W_2^1(0, T)$ обозначим $m(\Phi)$:

$$m(\Phi) = \inf_{\varphi \in \Phi} J(\varphi).$$

Теорема 2. Пусть Φ — ограниченное множество. Тогда существует такая единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$ что

$$m(\Phi) = J(\varphi_0). \quad (4)$$

Теорема 3. Если Φ — ограниченное множество и $\varphi_0 \in \Phi$ — минимизирующая функция, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\varphi \in \partial\Phi$, что $|J(\varphi) - J(\varphi_0)| < \varepsilon$.

Определение 4. Мы называем множество $\Phi \subset W_2^1(0, T)$ конечнономерно аппроксимируемым ([5]), если для некоторого конечного множества функций $\vartheta_1, \dots, \vartheta_N \in \Phi$ и некоторого числа M каждая функция $\varphi \in \Phi$ при некоторых $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| \varphi - \sum_{j=1}^N \gamma_j \vartheta_j \right\|_{W_2^1(0, T)} \leq M.$$

Теорема 4. Если множество Φ конечнономерно аппроксимируемо и

$$F(y) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \|y\|_{L_2(0, T)} \rightarrow \infty,$$

то существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой выполнено соотношение (4).

Теорема 5. Если коэффициенты a , b и p в уравнении (1) не зависят от t , то

$$m(W_2^1(0, T)) = \inf_{y \in L_2(0, T)} F(y).$$

Минимизирующая функция φ_0 как элемент Φ имеет следующие свойства.

Теорема 6. Если коэффициенты a , b и p в уравнении (1) не зависят от t , Φ — ограниченное множество и $m(\Phi) > \inf_{y \in L_2(0,T)} F(y)$, то $\varphi_0 \in \partial\Phi$.

Теорема 7. Если коэффициенты a , b и p в уравнении (1) зависят от t , Φ_j , $j = 1, 2$, являются такими ограниченными замкнутыми выпуклыми множествами в $W_2^1(0, T)$, что $\Phi_2 \subset \text{Int}\Phi_1$ и $m(\Phi_1) > \inf_{y \in L_2(0,T)} F(y)$, то $m(\Phi_1) < m(\Phi_2)$.

Литература

1. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемые уравнениями с частными производными / Ж.Л. Лионс. — М. : Мир. 1972.
2. Асташова И.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией / И.В. Асташова, А.В. Филиновский, Д.А. Лашин // Труды Моск. матем. общ-ва, 2019, — Т. 80, № 2. — С. 258–274.
3. Асташова И.В. Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения / И.В. Асташова, А.В. Филиновский, Д.А. Лашин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления – 2022. — Т. 504, С. 28–31.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. — М. : Физматлит. 1973.
5. Асташова И.В. О задачах экстремума и оценках управляющей функции для параболического уравнения / И.В. Асташова, А.В. Филиновский, Д.А. Лашин // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика – 2024, — № 1, — С. 40–50.

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР АБЕЛЯ НА ОТРЕЗКЕ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

С.Н. Асхабов (Грозный, ЧГУ им. А.А. Кадырова)
askhabov@yandex.ru

В данной работе изучается обобщенный интегральный оператор Абеля на отрезке $[a, b]$ с постоянными коэффициентами u и v :

$$(M^\alpha \varphi)(x) = u \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (FEGS-2026-0004)
© Асхабов С.Н., 2026

. Найдены условия, при которых обобщенный оператор Абеля M^α действует непрерывно из пространства Лебега $L_p(a, b)$, $p > 1$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(a, b)$, $p' = p/(p - 1)$, и является положительным (строго положительным) по Бохнеру.

Как известно, понятие положительного оператора по Бохнеру (далее, кратко, положительного оператора) тесно связано с понятием положительно определенной функции, играющим основополагающую роль при построении современного гармонического анализа (подробнее см. [1, пункт 9.1], где отмечены в этой связи работы С. Бохнера, М.М. Гельфанда, Д.А. Райкова и других). Свойство положительности операторов оказалось весьма полезным при исследовании как линейных, так и нелинейных уравнений, содержащих эти операторы (см., например, монографии [2], [3]).

Приведем необходимые определения и обозначения. Пусть X банахово пространство и X^* - сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle f, u \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $f \in X^*$ на элементе $u \in X$. Оператор A , действующий из X в X^* , называется положительным, если для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\langle Ax, x \rangle \geq 0$. Если при этом $\langle Ax, x \rangle > 0$ для $x \neq 0$, то оператор A называется строго положительным.

В частности, если $X = L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, с нормой $\|\cdot\|_p$, то $X^* = L_{p'}(a, b)$, $p' = p/(p - 1)$, и для любых $\varphi \in L_p(a, b)$, $\psi \in L_{p'}(a, b)$

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx.$$

Лемма 1. *Если $u \geq 0$, $v \geq 0$ и $p \geq 2$, то оператор M^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$ и является положительным (строго положительными, если $u > 0$ или $v > 0$), при этом*

$$\|M^\alpha \varphi\|_{p'} \leq \frac{(u+v)(b-a)^{\alpha+(p-2)/p}}{\alpha} \|\varphi\|_p \quad \forall \varphi \in L_p(a, b).$$

Введем операторы Римана-Лиувилля, следуя [4]:

$$(I_{a+}^\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{u(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (I_{b-}^\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{u(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}}.$$

Лемма 2. *Если $u \geq 0$, $v \geq 0$ и $2/(1+\alpha) \leq p < 2$, то оператор M^α действует непрерывно из $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$ и является положительным (строго положительными, если $u > 0$ или $v > 0$), при*

этом для любого $\varphi \in L_p(a, b)$ выполняется неравенство:

$$\|M^\alpha \varphi\|_{p'} \leq \Gamma(\alpha) n(\alpha) (u+v) (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p} \|\varphi\|_p,$$

где $n(\alpha) = \|I_{a+}^\alpha\|_{p \rightarrow p'} = \|I_{b-}^\alpha\|_{p \rightarrow p'}$ при $p = 2/(1+\alpha)$.

Теорема 1. Если $u \geq 0$, $v \geq 0$ и $2/(1+\alpha) \leq p < \infty$, то оператор M^α действует непрерывно из пространства $L_p(a, b)$ в $L_{p'}(a, b)$ и положителен (строго положителен, если $u > 0$ или $v > 0$), причем $\|M^\alpha \varphi\|_{p'} \leq C_1 \cdot \|\varphi\|_p$ для любого $\varphi \in L_p(a, b)$, где

$$C_1 = \begin{cases} \Gamma(\alpha) n(\alpha) (u+v) (b-a)^{[p(1+\alpha)-2]/p}, & \text{если } 2/(1+\alpha) \leq p < 2, \\ \alpha^{-1} (u+v) (b-a)^{\alpha+(p-2)/p}, & \text{если } p \geq 2, \end{cases}$$

Оператор $(M^\alpha)^* = \Gamma(\alpha) (v I_{a+}^\alpha + u I_{b-}^\alpha)$ является сопряженным с M^α , причем при условиях теоремы 1: $\|M^\alpha\|_{p \rightarrow p'} = \|(M^\alpha)^*\|_{p \rightarrow p'}$.

Литература

1. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х томах. Том 1 / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — 264 с.
2. Гохберг И.Ц. Теория вольтеровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 508 с.
3. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки / С.Н. Асхабов. — М. : Физматлит, 2009. — 304 с.
4. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В МОДЕЛИРОВАНИИ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

А.А. Ахматов, Ж.И. Буранов, Д.Х. Хусанов (Навои,
Навоийский государственный педагогический институт; Ташкент,
Академический лицей Ташкентского государственного
технического университета; Джизак, Университет Самбхрам,
Джизак, Узбекистан)

aaakhmatov94@mail.ru, juvenus88.60.94@mail.ru

Прямой метод Ляпунова является одним из основных методов выявления предельных свойств решений нелинейных уравнений [Шестаков А.А., 1990; Матросов В.М., 2001; Воротников В.В., Румянцев В.В., 2001]. Одним из основных подходов в применении этого метода в теоретических и прикладных задачах, моделируемых обыкновенными дифференциальными и функционально-дифференциальными уравнениями, является нахождение функции и функционала Ляпунова, имеющих знакопостоянную производную в силу уравнений [Красовский Н.Н., 1959; Хейл Дж.К., 1977; Горяченко В.Д., 1977]. Соответствующие результаты для автономных дифференциальных уравнений [Красовский Н.Н., 1951; Rouche N., Habets P., Laloy M., 1977; Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., 2014] получили развитие на основе построения топологической динамики неавтономных уравнений [Sell G.R., 1967; Artstein Z., 1977; Андреев А.С., Хусанов Д.Х., 1998а] в работах [Андреев А.С. 1984; Андреев А.С., Хусанов Д.Х., 1998б]. Широкий класс дифференциальных уравнений в моделировании составляют уравнения с переменными, отвечающими угловым координатам в рассматриваемых моделях [1, 2, 3]. В последнее десятилетие системы фазовой синхронизации стали широко применяться для коррекции расфазовых тактовых импульсов в интегральных схемах, являющихся элементной базой компьютеров и других цифровых устройств, разработки технических устройств [4, 5], для построения оптимальной структуры по энергозатратам управления роботами-манипуляторами [6].

В докладе дается краткий обзор результатов работ [7, 8, 9], излагаются новые результаты по исследованию предельной структуры функционально-дифференциальных уравнений в цилиндрическом фазовом пространстве, в качестве прикладных решаются задачи об агрегировании сложной системы со взаимосвязанными подсистемами на основе устойчивости последних в отдельности, о моделировании управляемого движения робота-манипулятора с цилиндрическими, сферическими, вязко-упругими шарнирами.

Литература

1. Барбашин Е.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством / Е.А. Барбашин, В.А. Табуева. — М. : Физматгиз, 1969. — 300 с.
2. Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics (Part II) / L.O. Chua, L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev // World Scientific. — 2001. — Vol. 5.

3. Leonov G.A. Nonlinear mathematical models of phase-locked loops. Stability and oscillations / G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov. — Cambridge University Press, 2014.

4. Kuznetsov N.V. The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations / N.V. Kuznetsov, M.Y. Lobachev, M.V. Yuldashev, et al. // 2020 European control conference (ECC). — IEEE. — 2020. — С. 769–774.

5. Mamonov S.S. Conditions for the existence of cycles in a system of differential equations / S.S. Mamonov, I.V. Ionova, A.O. Kharlamova // Differential Equations. — 2022. — Т. 58, № 2. — С. 165–174.

6. Andreev A. On global trajectory tracking control of robot manipulators in cylindrical phase space / A. Andreev, O. Peregudova // International Journal of Control. — 2020. — Vol. 93, No 12. — P. С. 3003–3015.

7. Буранов Ж.И. Об устойчивости по части переменных неавтономной системы в цилиндрическом фазовом пространстве / Ж.И. Буранов // Доклады АН РУз — 2021. — № 4. — С. 3–7.

8. Khusanov D.Kh. On stability with respect to the part of variables of a non-autonomous system in a cylindrical phase space / D.Kh. Khusanov, J.I. Buranov // Middle Volga Mathematical Society Journal. — 2021. — Vol. 23, No. 3. — P. 273–284.

9. Akhmatov A. On the Motion Control Models of a Two-Link Manipulator / A. Akhmatov, J. Khusanov, A. Berdiyarov, Z. Yusupova, J. Buranov // O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Mexanika Muammolari O‘zbekiston Jurnal. — 2022. — No 2. — P. 42–48.

ОБ ОДНОМ ЗАМЕЧАНИИ К МОДЕЛИ ИМПУЛЬСНОГО ПОГРУЖАТЕЛЯ

С.Д. Бабошин, Д.В. Костин, Т.И. Костина

(Воронеж, ВГУ, ВГТУ)

dvk605@mail.ru, tata_sti@rambler.ru

Моделирование работы сваедавливающего устройства в виде импульсного погружателя было описано в ряде работ [1],[2],[3]. В настоящей заметке делается замечание о выборе допусков на изготовление подобных установок. При этом обсуждаются сила вдавливания и коэффициент асимметрии, ключевые параметры устройства:

$$F_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (1)$$

Ранее было установлено, что коэффициент асимметрии, задаваемый формулой

$$K_n = \left| \frac{\max_{-\pi \leq t \leq \pi} F_n(t)}{\min_{-\pi \leq t \leq \pi} F_n(t)} \right| \quad (2)$$

достигает своего максимального значения $\max_{\lambda} K_n = n$ при $\varphi_k = 0$, для всех k и $\lambda_k = (n - k + 1)$ с точностью до множителя, при этом

$$\omega_k = k\omega_1 \quad (3)$$

где ω_1 - скорость вращения первой пары дебалансов.

В работах [4],[5] обсуждался вопрос появления неточности в отношении угловой скорости. В частности рассматривались изменения на каждой паре отдельно. В данном случае важно иметь ввиду, что при невыполнении условия (3) на единичном отрезке $[-\pi; \pi]$ установка будет работать. Но на длительном промежутке времени при достаточно большом количестве оборотов коэффициент асимметрии будет меняться и произойдет разбалансировка установки в связи с некратностью угловых скоростей.

Замечание. Условие кратности оборотов (3) определяет требование синхронного вращения пар дебалансов и обеспечивает устойчивую работу установки.

Выполнение данного условия в инженерных решениях выполняется за счет использования единого электропривода для всех пар дебалансов, в противном случае, даже малые отличие угловых скоростей дебалансов, создаваемые разными электроприводами приведет к неустойчивой работе.

Литература

1. Костин В.А. Многочлены Максвелла-Фейера и оптимизация полигармонических импульсов / В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // ДАН. 2012. Т. 445, №3. —С. 271-273.
2. Костин Д.В. Бифуркация резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии / Д.В. Костин // Математический сборник. – 2016. – Т. 207, № 12. – С. 90-109.
3. Костин Д.В. Нелинейная математическая модель импульсного погрузателя / Д.В. Костин, Т.И. Костина, А.В. Журба, А.С. Мызников // Челябинский физико-математический журнал. – 2021. – Т. 6, № 1. – С. 34-41.

4. Kostina T. Mathematical Model of a Pulse Submerger and the Influence of Manufacturing Tolerances. / Kostina, T., Baboshin, S., Zhurba, A. // Lobachevskii J Math 44 - 2023 - С. 3404-3410.

5. Костин Д.В. О математической модели неидельного импульсного погружателя / Д.В. Костин, Т.И. Костина, С.Д. Бабошин, А.В. Журба // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2024 : Материалы международной Воронежской зимней математической школы, посвященной памяти В.П. Маслова, Воронеж, 26–30 января 2024 года. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2024. – С. 129-130.

О РАЗНОСТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ¹

А.К. Баззаев (Владикавказ, СОГУ, ВИУ)

a.k.bazzaev@yandex.ru

Работа посвящена исследованию задачи для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной по пространственной переменной в младших членах в прямоугольнике $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \partial_{0t}^\beta u - q(x, t) u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

с неклассическими краевыми условиями

$$u(0, t) = u(1, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\eta(x, \eta) d\eta}{(t-\eta)^\alpha}$ — дробная производная Капуто по вре-

мени порядка α , $0 < \alpha < 1$, $\partial_{0x}^\beta u = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{u_\xi(t, \xi) d\xi}{(x-\xi)^\beta}$ — дроб-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2025-1530.

© Баззаев А.К., 2026

ная производная Капуто по пространственной переменной x порядка β , $0 < \beta < 1$.

Для рассматриваемой задачи исследовано однопараметрическое по σ , $0 \leq \sigma \leq 1$, семейство разностных схем

$$\Delta_{0t_j}^\alpha y_i = \Lambda y_i^{(\sigma)} + r_i \Delta_{0x_i}^\beta y_i^{(\sigma)} - d_i y_i^{(\sigma)} + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4)$$

$$a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = -0.5h \left(\Delta_{0t_j}^\alpha y_N - r_N \Delta_{0x_N}^\beta y_N^{(\sigma)} + (d_N y_N)^{(\sigma)} - f_N \right), \quad (5)$$

$$y_0^j = y_N^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \quad (6)$$

$$y_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

где $\Delta_{0t_j}^\alpha u$ — дискретный аналог дробной производной по времени порядка α , $0 < \alpha < 1$, $\Delta_{0x_i}^\beta u$ — дискретный аналог дробной производной по пространственной переменной x порядка β , $0 < \beta < 1$ [1]

$$\Delta_{0t_j}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) u_t^s, \quad u_t^s = \frac{u^{s+1} - u^s}{\tau},$$

$$\Delta_{0x_i}^\beta u = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=1}^i (x_{i-k+1}^{1-\beta} - x_{i-k}^{1-\beta}) u_{\bar{x},k}, \quad u_{\bar{x},k} = \frac{u_k - u_{k-1}}{h}.$$

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x, \quad a_i = 0.5(k_{i-1} + k_i), \quad k_i = k(x_i, \bar{t}), \quad d_i = q(x_i, \bar{t}),$$

$$f_i = f_i^j = f(x_i, \bar{t}), \quad \varphi_i = \varphi(x_i), \quad \bar{t} = t_j + 0.5\tau,$$

$$y_i^{(\sigma)} = \sigma \hat{y}_i + (1-\sigma)y_i, \quad \hat{y} = y_i^{j+1}, \quad y = y_i^j, \quad \check{y} = y_i^{j-1}, \quad y_{\bar{x},N} = \frac{y_N - y_{N-1}}{h}.$$

Справедлива

Теорема 1. Пусть $0 \leq \sigma \leq 1$. Тогда разностная задача (4) — (7) имеет единственное решение при любых правых частях.

С помощью принципа максимума [2] для разностной задачи получена априорная оценка, из которой следует устойчивость разностных схем и сходимости численного решения к точному в норме C .

Теорема 2. Пусть выполнено условие

$$(1-\sigma)\tau^\alpha \leq \frac{\Gamma(2-\beta)(2-2^{1-\alpha})h^2}{\Gamma(2-\alpha)(\Gamma(2-\beta)(2c_2 + c_5 h^2) + c_4 h^{2-\beta})}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Тогда разностная схема (4) — (7) равномерно устойчива по начальному условию и правой части в норме C , и для ее решения справедлива оценка $\|y^{j+1}\|_C \leq \|\varphi\|_C + \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha \sum_{j'=0}^j \|f^{j'}\|_C$.

Литература

1. Таукунова Ф.И. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка / Ф.И. Таукунова, М.Х. Шхануков-Лафишев // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. №10. С.1871 — 1881.
2. Самарский А.А. Устойчивость разностных схем. / А.А. Самарский, А.В. Гулин — М.: Наука. 1973. — 415 с.

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЬЮЭЛЛА-УАЙТХЕДА

О.П. Барабаш, И.П. Половинкин

(Воронеж, ВУНЦ ВВС «ВВА»; Воронеж, ВГУ; Белгород, БелГУ)
navyS9@yandex.ru

Рассмотрим в прямоугольнике $\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ начально-краевую задачу для одномерного уравнения Ньюэлла-Уайтхеда, представляющего собой уравнение реакции-диффузии [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au - bu^3, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_1(t), u(1, t) = u_2(t), 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

На разбиении отрезка $[0, 1]$ оси Ox и $[0, T]$ оси Ot введем сетку с постоянными шагами $h = 1/N$ и $\tau = T/M$ соответственно.

Значение сеточной функции y в узле (x_i, t_j) обозначим y_i^j , будем использовать шаблон, состоящий из узлов $(x_{i\pm 1}, t_{j+1}), (x_i, t_{j+1}), (x_{i\pm 1}, t_j), (x_i, t_j)$ с центром в точке (x_i, t_{j+1}) .

При проведении разностной аппроксимации примем обозначение:

$$\Lambda y_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.$$

Введем произвольные вещественные параметры $\sigma, \eta, \alpha, \beta$, получим семейство дискретных моделей (разностных схем) с весами [2]:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y_i^{j+1} + \eta y_i^j) + \alpha y_i^{j+1}(a - b y_i^j y_i^j) + \beta y_i^j(a - b y_i^{j+1} y_i^j), \quad (4)$$

где $0 < i < N, 0 \leq j < M$. Начальные и краевые условия аппроксимируем точно.

Для удобства записи примем безындексные обозначения [3]:

$$y_i^j = y, y_i^{j+1} = \widehat{y}, y_t = \frac{\widehat{y} - y}{\tau}.$$

Погрешность введённой схемы (невязка) определяется как разность между сеточным решением y_i^j и точным решением задачи $u(x, t)$, вычисленным в узлах пространственно-временной сетки:

$$\psi = \sigma \Lambda \widehat{u} + \eta \Lambda u - u_t + \alpha \widehat{u}(a - bu^2) + \beta u(a - b\widehat{u}u). \quad (5)$$

Будем считать функцию $u(x, t)$ достаточно гладкой. Выпишем соотношения, полученные с помощью разложения в ряд Тейлора в окрестности узла (x_i, t_j) , тогда

$$\Lambda u = u''_x + \frac{h^2}{12} u^{(4)}_x + O(h^4), u_t = u'_t + O(\tau).$$

Обозначим $\partial^2 u / \partial x^2 = Lu$ и $u'_t = \dot{u}$. При подстановке $Lu = \dot{u} - u(a - bu^2)$ в (5), получим выражение для невязки

$$\psi = \dot{u}(\sigma + \eta - 1) - u(a - bu^2)(\sigma + \eta - \alpha - \beta) + O(h^2 + \tau).$$

Отсюда очевидно, что при выполнении условий

$$\begin{cases} \sigma + \eta = 1, \\ \alpha + \beta = 1, \end{cases} \quad (6)$$

погрешность аппроксимации будет определяться равенством

$$\psi = O(h^2 + \tau).$$

Построенная разностная схема для начально-краевой задачи с нелинейным уравнением приводит к линейной системе алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, известный алгоритм решения которой имеет линейную временную сложность.

Литература

1. Колмогоров А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюллетень МГУ, Серия А, Математика и механика. — 1937. — Т. 1 № 6 4. — С. 1–16.

2. Барабаш О.П. Об одном способе дискретизации задачи Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова / О.П. Барабаш // Международный научно-исследовательский журнал. — 2025. — № 5(155).

3. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. — Москва : Наука, 1971. — 553 с.

О СОСТОЯНИЯХ НЕПРЕРЫВНОЙ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ С КОМПАКТНОЙ РЕЗОЛЬВЕНТОЙ

А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Л.Н. Костина,
Н.Б. Ускова (Воронеж, ВГУ, ВГТУ)

*anatbaskakov@yandex.ru, g.garkavenko@mail.ru, kostinalubov@bk.ru,
nat-uskova@mail.ru@mail.ru*

Пусть \mathcal{X} — банахово пространство и $B(\mathcal{X})$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов в \mathcal{X} , $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ — декартово произведение. Линейным отношением на \mathcal{X} называется линейное подпространство $\mathcal{A} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ отождествляется со своим графиком, т. е. множеством пар (x, Ax) , где $x \in D(A)$. Далее вместо термина «линейное отношение» будем писать «отношение». Терминология полностью согласована с [1], [2].

Обратное к отношению \mathcal{A} отношение \mathcal{A}^{-1} всегда существует и определяется равенством $\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Отношение \mathcal{A}^{-1} называется непрерывно обратимым, если $\mathcal{A}^{-1} \in B(\mathcal{X})$. Резольвентным множеством $\rho(\mathcal{A})$ отношения \mathcal{A} называется множество таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in B(\mathcal{X})$, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$, $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} : (x, 0) \in \mathcal{A}\}$, $\text{Im } \mathcal{A} = \{y \in \mathcal{X} : \text{существует } x \in \mathcal{X} \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Отображение $R(\cdot, \mathcal{A}) \rightarrow B(\mathcal{X})$, $R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in B(\mathcal{X})$, называется резольвентой отношения \mathcal{A} . Расширенным спектром отношения $\mathcal{A} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ называется подмножество $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ из расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A}0 = \{0\}$, резольвента $R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, допускает голоморфное расширение в точку ∞ и $R(\infty, \mathcal{A}) = 0$. В противном случае считается, что $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \cup \{\infty\}$. Бесконечность принадлежит $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$, если $\dim \mathcal{A}0 \geq 1$.

Пусть $R(\lambda, \mathcal{A})$ есть компактный оператор. В докладе рассматриваются состояния обратимости такого отношения \mathcal{A} .

Определение 1 ([2], [3]). Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ — линейное отношение, причем линейное подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ замкнуто. Рассмотрим следующие условия:

- 1) $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$;
- 2) $1 \leq \dim \text{Ker } \mathcal{A} = n < \infty$;
- 3) $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \infty$;
- 4) $\text{Ker } \mathcal{A}$ — дополняемое подпространство (или в $D(\mathcal{A})$, или в \mathcal{X});
- 5) $\text{Im } \mathcal{A} = \overline{\text{Im } \mathcal{A}}$;
- 6) отношение \mathcal{A} корректно, т. е. $\text{Ker } \mathcal{A} = 0$, и

$$\gamma(\mathcal{A}) = \inf_{x \in D(\mathcal{A}) \setminus \text{Ker } \mathcal{A}} \frac{\|Ax\|}{\text{dist}(x, \text{Ker } \mathcal{A})} > 0;$$

- 7) $\gamma(\mathcal{A}) > 0$;
- 8) $\text{Im } \mathcal{A}$ — замкнутое дополняемое в \mathcal{X} подпространство коразмерности $1 \leq m = \text{codim Im } \mathcal{A} < \infty$ ($\text{codim Im } \mathcal{A} = \dim \mathcal{X} / \text{Im } \mathcal{A}$);
- 9) $\text{codim Im } \mathcal{A} = \infty$;
- 10) $\text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{X}$;
- 11) отношение \mathcal{A} непрерывно обратимо.

Если для \mathcal{A} выполнены все условия из некоторой совокупности условий $S_0 = \{i_1, \dots, i_k\}$, то отношение \mathcal{A} находится в состоянии S_0 . Множество состояний обратимости обозначается через $\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{A})$, множество состояний обратимости по ядру через $\text{St}_{\text{Ker}}(\mathcal{A})$, а по образу через $\text{St}_{\text{Im}}(\mathcal{A})$.

Теорема 1. Пусть \mathcal{A} — отношение с компактной резольвентой. Тогда его расширенный спектр $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \cup \{\infty\}$. При этом $\sigma(\mathcal{A})$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности (кроме, возможно, точки ∞ , не входящей в $\sigma(\mathcal{A})$).

Теорема 2. Если отношение \mathcal{A} непрерывно обратимо, то $\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{A}) = \{1, 10\} = \{11\}$. Если же $0 \in \sigma(\mathcal{A})$, то $\text{St}_{\text{Ker}}(\mathcal{A}) = \{2, 4\}$.

Литература

1. Баскаков А.Г. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов / А.Г. Баскаков, К.И. Чернышов // Матем. сб. — 2002. — Т. 193, № 11. — С. 3–42.
2. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А.Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68, № 1(409). — С. 77–128.
3. Баскаков А.Г. Об эквивалентных операторах / А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова, Л.Н. Костина // Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2024. — Т. 235. — С. 3–14.

СЛАБО МЕНЯЮЩИЕСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ И ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

А.Г. Баскаков, Т.Л. Джонга (Воронеж, ВГУ)
anatbaskakov@yandex.ru, tresordjong@gmail.com

Всюду символом (\mathcal{X}, d) обозначим полное метрическое пространство \mathcal{X} с расстоянием $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Определение 1. Последовательность $x : \mathbb{N} \rightarrow (\mathcal{X}, d)$ из метрического пространства (\mathcal{X}, d) будет называться *слабо меняющейся на бесконечности*, если существует суммируемая последовательность $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha(n)d(x_1, x_0)$, где $n \geq 1$, $\alpha \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}_+)$.

Множество слабо меняющихся на бесконечности последовательностей обозначим символом $l_{sl}^\infty(\mathcal{X}, d)$.

Лемма 1. Любая последовательность $x \in l_{sl}^\infty(\mathcal{X}, d)$ фундаментальна и имеет предел $x_* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n)$, $x_* \in (\mathcal{X}, d)$.

Определение 2. Отображение $f : (\mathcal{X}, d) \rightarrow (\mathcal{X}, d)$ называется слабо меняющимся на бесконечности, если существует суммируемая последовательность $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq \alpha(n)d(x_0, f(x_0)), x_0 \in (\mathcal{X}, d), n \in \mathbb{N}, \alpha \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}_+).$$

Пусть

$$Q(m, n) = \sum_{j=n}^{m-1} \alpha(j), \quad m, n \geq 1, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть $x_n = f^n(x_0)$, $n \geq 1$ является слабо меняющейся на бесконечности последовательностью. Тогда последовательность вида $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$ сходится к единственной неподвижной точке x_* отображения f , т.е. $x_* = f(x_*)$, $x_* = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n x_0$. При этом справедливы оценки

$$d(f^n(x_0), x_*) \leq \frac{\alpha(n)}{1 - \alpha(n)} d(x_0; f(x_0)), \quad n \geq 0$$

для любого $x_0 \in (\mathcal{X}, d)$.

Следствие 1. Пусть $x \in l_{sl}^\infty(\mathcal{X}, d)$, тогда

$$d(x_n, x_*) \leq \frac{\alpha(n)}{1 - \alpha(n)} d(x_1, x_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следствие 2. Если отображение f сжимающее (т.е. $d(f(x, y)) \leq qd(x, y)$) и $x_{n+1} = f(x_n)$, тогда $(x_n) \in l_{sl}^\infty(\mathcal{X}, d)$ и $\alpha(n) = q^n$, $n \geq 1$.

Пример. Пусть \mathcal{X} дискретная динамическая система заданной модели Лесли $x_{n+1} = f(x_n)$ где $f(x) = \mathcal{M}x$, где \mathcal{M} квадратная матрица размерность m и $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\mathcal{M}x_n, \mathcal{M}x_{n-1}) \leq \|\mathcal{M}\|^n \|(x_1 - x_0)\|,$$

где $\alpha(n) = \|\mathcal{M}\|^n$ и \mathcal{M} марковская матрица, то $\|\mathcal{M}\| \leq 1$ и последовательность x слабо меняющаяся на бесконечности так как для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ и выражение (1) равно

$$Q(m, n) = \frac{\|\mathcal{M}\|^n - \|\mathcal{M}\|^k}{1 - \|\mathcal{M}\|} \leq \frac{\|\mathcal{M}\|^n}{1 - \|\mathcal{M}\|} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Лемма 2. Если отображение f^n – сжимающее для некоторого $n \geq 1$, то f – слабо меняющаяся на бесконечности.

Лемма 3. Если отображение f слабо меняется на бесконечности и \mathcal{X} – банахово пространство, то $(I - f)$ обратимое отображение.

Лемма 4. Если для марковской матрицы $\mathcal{M} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{M}^{n+1} - \mathcal{M}^n\| = 0$, то существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{M}^n$.

Если $f = \mathcal{M}$ марковская матрица, то существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{M}^n = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}x = x \forall x \in \mathbb{R}^m$, т.е. \mathcal{P} -проектор на $E(1, \mathcal{M})$ собственное подпространство для \mathcal{M} .

Теорема 2. Степени марковской матрицы

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix}$$

являются слабо меняющимися на бесконечности, если $|a - b| < 1$.

Литература

1. Баскаков А. Г. Лекции по алгебре / А. Г. Баскаков. – Воронеж: изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2017. – 283 с.
2. Фомин С. В. Элементы теории функций и функционально-го анализа / С. В. Фомин, А. Н. Колмогоров. – Москва : Наука : Физматлит, 1972. – 543 с.

С МОДУЛЯЦИЕЙ НЕЙРОПЛАСТИЧНОСТИ

К.В. Белаш (Воронеж, ВГУ)

kirillbelas1@gmail.com

Под нейромедиаторами будем подразумевать глобальные для всей сети переменные. Они ограничены диапазоном $0 \leq k \leq 2$ и выполняют функции, приближённые к реальным нейромедиаторам в биологическом мозге. Высокий уровень серотонина (S) уменьшает случайный шум в сети и увеличивает порог активации. Низкий уровень серотонина (S) увеличивает шум, повышая вероятность спонтанной активации. Высокий уровень дофамина (D) увеличивает вероятность создания новой связи. Низкий уровень дофамина (D) способствует удалению старых связей.

Под связью, ребром графа, синапсом, подразумевается вектор содержащий: вес связи (ω), выживаемость связи (α), индекс нейрона от которого идёт связь (l_o) и индекс нейрона к которому идёт связь (l_i):

$$w = (\omega, \alpha, l_o, l_i); \quad |l_o - l_i| < r$$

где r — максимальное расстояние, на котором нейроны могут создавать связи, подбирающееся экспериментально.

Изначально модель предполагает список пронумерованных нейронов, в процессе работы которой формируется вычислительный граф. В отличие от классических SNN (спайковых нейронных сетей), где часто сосредотачиваются на увеличении информационной ёмкости спайка, данная модель упрощённо имитирует химическую активность каждого нейрона, учитывая активность всей сети. На каждом шаге работы t значение нейромедиаторов динамически регулируется в зависимости от значения функции ошибки. Если медиатор отличен от 1, он стремится к 1.

$$D_t = D_{t-1} + \lambda \cdot (1 - D_{t-1});$$

где λ — константа определяющая скорость стремления D к 1.

$$S_t = S_{t-1} \cdot \left(b - \frac{\sum_{i=1}^n v_i(t-1)}{n} + 1 \right);$$

где n — общее количество нейронов в сети, b — константа определяющая порог средней активности сети, а $v_i(t)$ — потенциал нейрона i

на шаге t . Все константы подбираются экспериментально, чтобы добиться неизменности связей при $D = 1$ и $S = 1$. Расчёт потенциала нейрона v_i на шаге t при $0 \leq S \leq 1$ производится по формуле:

$$v_i(t) = v_i(t-1) \cdot \delta(S_t) + \sigma(S_t) + \sum_{j=1}^{n_{wi}} w_{ij}; \quad \sigma(S) \in [0; L]$$

или если $S > 1$:

$$v_i(t) = v_i(t-1) \cdot \delta(S_t) + \sum_{j=1}^{n_{wi}} w_{ij}$$

$$\delta(S_t) = 1 - L + \frac{LS_t^3}{8}$$

где $\delta(S_t)$ — коэффициент затухания, n_{wi} — количество синапсов активированных на шаге t нейронов, к текущему, w_{ij} — вес конкретной связи j идущей к нейрону i , L — максимальное значение затухания в диапазоне $0 < L < 1$ подбирающееся экспериментально, а $\sigma(S)$ — стохастический шум линейно убывающий при росте серотонина. При получении веса связи, α увеличивается на $D - 1$ если $D > 1$, в противном случае α не изменяется. После накопления определённого потенциала на мембране нейрона происходит активация. Проверка активирован ли нейрон на шаге t , происходит по формуле:

$$v_i(t) > \theta_{eff}(S_t)$$

$$\theta_{eff}(S_t) = S_t T^2 - T^2 + T$$

при условии что нейрон не находится в рефракторном периоде.

где $\theta_{eff}(S_t)$ — эффективный порог активации нейрона, а T — базовый порог активации нейрона в диапазоне $0 < T < 1$, который подбирается экспериментально.

После активации нейрона его потенциал сбрасывается до 0 и наступает рефракторный период, в течение которого не может произойти повторная активация.

Каждый шаг работы сети включает следующие операции:

- Увеличение α каждой связи на $D - 1$ если $D < 1$.
- Поиск связей с $\alpha < 0$ и удаление.
- Подстановка значений во входные нейроны (если есть данные).
- Проверка, не превосходит ли потенциал нейронов порог перевозбуждения (I) подбирающийся экспериментально, если превосходит:

создание новых связей со случайным весом $\omega \in [-b; 0]$, от случайных нейронов, активированных на предыдущем шаге, не дальше чем r .

- Поиск цепочек последовательных активаций для нейронов и создание связей если такие имеются.

- Активация нейронов и применение рефракторного периода.

- Распространение сигнала (расчёт потенциалов нейронов).

Модель применима для управления роботами. Основными преимуществами являются мгновенная реакция на изменение среды (кратно t) и адаптация к новым условиям за счёт динамичности связей.

Литература

1. Борисюк Г.Н. Модели динамики нейронной активности при обработке информации мозгом — итоги «десятилетия» / Р.М. Борисюк, Я.Б. Казанович, Г.Р. Иваницкий / УФН 172 — 2002 — 1189—1214
2. Morrison, A. Phenomenological models of synaptic plasticity based on spike timing. / Diesmann, M., Gerstner, W. / Biological Cybernetics — 2008 — 98:459—478.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ФУНКЦИЙ

А.М. Бирюков (Москва, НИУ МЭИ)

birukovalmix@mail.ru

В данной работе рассматривается комплексная задача Коши для общих линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, z) - A(t, z, D)u = h(t, z)$$
$$u(t_0, z) = \varphi(z),$$

в пространствах Харди-Лебега с весом вектор-функций целых по переменной z и аналитических в круге $|t - t_0| < \delta$ по переменной t . Функции из введённых пространств могут допускать рост экспоненциального типа при $z \rightarrow \infty$. При этом тип роста по пространственной переменной может зависеть определённым образом от временной переменной t .

Получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты дифференциального оператора, при выполнении которых постав-

ленная задача Коши является корректной в указанной шкале функциональных пространств, и, таким образом, дано точное описание структуры систем дифференциальных уравнений, для которых эта корректность имеет место. При этом область определения решения рассматриваемой задачи Коши совпадает с областью определения правой части системы дифференциальных уравнений. Ранее в работе [1] подобные задачи рассматривались в банаховых пространствах аналитических функций с супремум-нормами и были получены критерии корректности в соответствующей шкале функциональных пространств. Оказывается, что условия, при выполнении которых задача Коши является корректно разрешимой в пространствах с супремум-нормами и в пространствах с интегральными метриками, совпадают.

Литература

1. Дубинский Ю.А. Задача Коши в комплексной области / Ю.А. Дубинский. — М. : Издательство МЭИ, 1996. — 180 с.

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИНСТРУМЕНТАХ АНАЛИЗА ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Е.М. Богатов (Старый Оскол, СТИ НИТУ МИСИС;
Губкин, ГФ НИТУ МИСИС)
embogatov@inbox.ru

В последние годы большое значение придаётся оценке деятельности предприятий по части устойчивости и стабильности их развития. При этом инструментарий диагностики соответствующих производственных процессов (под которыми мы понимаем экономические, финансовые, социальные, кадровые, экологические и т.п. процессы, характеризующиеся каким-либо одним показателем $x = x(t)$) разработан недостаточно полно. Некоторые шаги в решении обозначенной проблемы были сделаны в [1], где дано определение устойчивых и стабильных отраслевых экономических процессов, показатели которых предполагаются распределёнными по нормальному закону. Однако на практике такое распределение наблюдается далеко не всегда даже для технологических процессов, поэтому гораздо более важным является использование непараметрических критериев.

Ключевые положения, восходящие к теории статистического контроля качества, имеют следующий вид:

1. необходимость получения выборки наблюдений за показателем $x(t)$ за несколько периодов t_1, t_2, \dots, t_n в контексте функционирования ряда предприятий C_1, C_2, \dots, C_k ;
2. необходимость выбора непараметрических критериев, характеризующих центр и разброс значений $x_i(t)$, и соответствующих им статистик S_C и S_R ;
3. построчная обработка массива $X = x_{ij}$ в зависимости от выбранных критериев;
4. построение допустимых границ изменения величин S_C и S_R , позволяющих в дальнейшем делать выводы о стабильности и устойчивости исследуемого процесса.

Отметим, что пункт 3 включает в себя проведение предварительной кластеризации данных (по непараметрическим критериям) с целью выделения однородных по отношению к столбцам сегментов наблюдений, а также проверки согласованности строк матрицы X . При этом несогласованность строк X в случае диагностики стабильности процесса даёт возможность применять критерий знаков, восходящий к схеме Бернулли, статистика которого имеет вид $S_{nt} = \sum_{j=1}^k \text{sign}(x_{tj} - M_0)$, $t = 1, \dots, n$, где M_0 – медиана X или другое целевое значение процесса $x(t)$ [2]. Краеугольным камнем в построении допустимых границ $(-c, c)$ изменения величины S_n является определение вероятности ложного сигнала (FS) по формуле $P(FS) = 2 \left(1 - \sum_{m=1}^s C_n^m 0.5^n \right)$, где $s = (n + c - 2)/2$, c – натуральное число, имеющее ту же чётность, что и n .

Диагностику процесса $x(t)$ на предмет устойчивости предлагается осуществлять на основе двухвыборочного критерия Муда, статистика которого имеет вид $M = \sum_{i=1}^n (R_i - \frac{2n+1}{2})^2$, где R_i – ранги модулей отклонений значений столбца X_j матрицы X , имеющего n компонент, от медианы выборки, включающей в себя столбцы X_j и X_{j-1} , $j = 2, \dots, k$ [3]. Построение допустимых границ изменения величины z (нормализованной величины M) выполняется исходя из равенства $|z_t| = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, где z_p – квантиль стандартного нормального распределения уровня p , α – уровень значимости.

Апробация обозначенной методики проводилась на основе панельных данных, соответствующих сегментам реального сектора российской экономики, наблюдаемым в течение десяти лет.

Литература

1. Богатов Е. М. Об одном статистическом методе анализа сбалансированности экономических процессов / Е. М. Богатов, Е. Г. Демидова // Экономика и математические методы. — 2024. — Т. 60, № 1. — С. 121–132.

2. Bakir S. T. A distribution-free Shewhart quality control chart based on signed-ranks / S.T. Bakir // Quality Engineering. — 2004. — V. 16, №. 4. — С. 613–623.

3. Mood A. M. On the asymptotic efficiency of certain nonparametric two-sample tests / A.M. Mood // Annals of Mathematical Statistics. — 1954. — V. 25. — P. 514–522.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

А.С. Бондарев (Воронеж, ВГУ)

bondarev@math.vsu.ru

Пусть даны вложенные сепарабельные гильбертовы пространства $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – двойственное к V , а $H \equiv H'$. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по $u, v \in V$ форму $a(u, v)$. Пусть для $u, v \in V$

$$|a(u, v)| \leq \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \rightarrow V'$, такой, что $(Au, v) = a(u, v)$, где выражение типа (z, v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$.

Рассмотрим в V' на $[0, T]$ параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \quad (2)$$

Здесь и далее производные функций понимаются в обобщенном смысле. В [1, с. 289] показано, что для заданного $f \in L_2(0, T; V')$ существует (и притом единственное) решение $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u' \in L_2(0, T; V')$ задачи (2), называемое слабым.

Пусть V_h , где $h > 0$, есть конечномерное подпространство пространства V . Определим пространство V'_h , задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V'_h} = \sup |(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$, $\|v_h\|_V = 1$.

Пусть P_h – ортопроектор в пространстве H на V_h . Оператор P_h допускает расширение по непрерывности до $\overline{P}_h : V' \rightarrow V'_h$.

В V_h рассмотрим полудискретную приближенную задачу

$$u'_h(t) + \overline{P}_h A u_h(t) = \overline{P}_h f(t), \quad u_h(0) = u_h(T). \quad (3)$$

Через A_h обозначим сужение оператора $\overline{P}_h A$ на V_h . Тогда из соотношения $(A_h u_h, v_h) = a(u_h, v_h)$ для $u_h, v_h \in V_h$ и свойств (1) следует самосопряженность и положительная определенность оператора A_h , значит, существует обратный оператор A_h^{-1} .

Лемма. Пусть в задаче (3) $\overline{P}_h f(t) \in L_2(0, T; V'_h)$. Тогда для решения $u_h(t)$ задачи (3) справедлива оценка

$$\int_0^T (\|u_h(t)\|_H^2 + \|A_h^{-1} u'_h(t)\|_H^2) dt \leq C \int_0^T \|A_h^{-1} \overline{P}_h f(t)\|_H^2 dt.$$

Последовательность $\{V_h\}$ подпространств пространства V назовем предельно плотной, если для любого $v \in V$ $\|(I - Q_h)v\|_V \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Здесь Q_h – ортопроектор V на V_h .

Теорема. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), а $u_h(t)$ – решение задачи (3). Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность подпространств. Тогда при $h \rightarrow 0$

$$\int_0^T (\|u(t) - u_h(t)\|_H^2 + \|A_h^{-1} [\overline{P}_h u'(t) - u'_h(t)]\|_H^2) dt \rightarrow 0.$$

Установим скорость сходимости. Рассмотрим множество $D(A) = \{u \in V : Au \in H\}$. Пусть существует гильбертово пространство E такое, что $D(A) \subset E \subset V$ и выполняется оценка

$$\|v\|_E \leq \delta \|Av\|_H \quad (v \in D(A), \delta \geq 0). \quad (4)$$

Пусть подпространства V_h обладают свойством

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leq rh \|v\|_E \quad (v \in E). \quad (5)$$

Следствие. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), а $u_h(t)$ – решение задачи (3). Пусть подпространства V_h обладают свойством

(5), а для оператора A выполняется требование (4). Тогда справедлива оценка

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 dt \leq Ch^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt.$$

Если же слабое решение $u(t)$ задачи (2) такое, что $u \in L_2(0, T; E)$, то оценка следующая

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 dt \leq Ch^4 \int_0^T \|u(t)\|_E^2 dt.$$

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения. / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес – М.: Мир, 1971. – 372 с.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ОПИСЫВАЮЩАЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Е.З. Борович (Санкт-Петербург, СПбГЭТУ)
danitschi@gmail.com

Рассматривается система

$$\begin{cases} \operatorname{div}(D(|\nabla v|)(\nabla n - n\nabla v)) = 0, \\ -\operatorname{div}(\nabla v) = f - n, \end{cases} \quad (1)$$

где n – плотность электронов, v – электростатический потенциал; $D > 0$ – коэффициент диффузии; функция f задает неоднородную плотность ионизированной примеси [1].

Пусть $\Omega \in R^2$ – кольцо, задаваемое неравенствами $0 < \alpha \leq \rho \leq \beta$. Поставим граничные условия

$$\begin{cases} (\nabla v, \nu)(\alpha) = \gamma_1, (\nabla v, \nu)(\beta) = -\gamma_2, \\ D(|\nabla v|)((\nabla n, \nu) - n(\nabla v, \nu))(\beta) = j, \end{cases} \quad (2)$$

где ν – внешняя нормаль к границе кольца, $j > 0$ – плотность тока электронов на границе $\rho = \beta$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2$. Предположим, что плотность электронов и электростатический потенциал зависят только от полярного радиуса ρ , а плотность ионизированной примеси

линейно зависит еще от плотности тока электронов: $f(\rho) = jg_1(\rho) + g_0$, $g_1(\rho) > 0$, $g_0 \geq 0$. При сделанных предположениях задача (1)–(2) эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \varphi'' + \left(\frac{\varphi}{\rho}\right)' + \frac{\varphi^2}{\rho} + \varphi\varphi' - g_0\varphi = j(g_1'(\rho) + g_1(\rho)\varphi - \frac{\beta}{\rho D(|\varphi|)}), \\ \varphi(\alpha) = \gamma_1, \quad \varphi(\beta) = \gamma_2, \end{cases} \quad (3)$$

где $\varphi(\rho) = -v'(\rho)$.

Задача (3) является стационарной для следующей нестационарной задачи

$$\begin{cases} \frac{\dot{\varphi}}{D(|\varphi|)} = \varphi'' + \left(\frac{\varphi}{\rho}\right)' + \frac{\varphi^2}{\rho} + \varphi\varphi' - f\varphi + \frac{j\beta}{\rho D(|\varphi|)}, \\ \varphi(\alpha, t) = \gamma_1, \quad \varphi(\beta, t) = \gamma_2, \quad \varphi(\rho, 0) = \tilde{\varphi}(\rho). \end{cases} \quad (4)$$

Теорема [2]. *Нестационарная задача (4) определяет динамическую систему.*

Литература

1. Groeger K. Initial-boundary value problems describing mobile carrier transport in semiconductor devices // Comment. Math. Univ. Carol. — 1985. — Vol.26. — N 1. — P. 75–89.
2. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М. : Мир, 1985. — 376 с.

ЭКВИДИСТАНТЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

А.А. Бортников, Л.В. Стенюхин (Воронеж, ВГУ)

bortnikov7maath@mail.ru, stenyuhin@mail.ru

В системе xOy рассматривается гладкая параметрически заданная кривая

$$r(t) = (x(t), y(t))$$

с семейством своих эквидистант. Необходимо выяснить, нарушается ли эквидистантность при движении кривых. Для этого моделируются две разных случая.

Случай 1. Кривая $r(t)$ движется поступательно и прямолинейно в произвольном направлении со скоростью v . Она будет сжата вдоль прямой, параллельной вектору \vec{v} скорости кривой (особенно это заметно при околосветовой скорости кривой), что описывается преобразованиями Лоренца.

Однако, угол $\angle(\vec{v}; Ox) \in (0; 2\pi)$ может быть произвольным в силу произвольности направления движения кривой в системе xOy (для рассмотрения лишь одного случая будем считать, что угол между осью Ox и вектором \vec{v} отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки). Тогда повернём исходную систему координат на угол φ .

Теперь применим преобразования Лоренца в новой системе координат, после чего построим семейство эквидистант для полученной кривой.

Получаем, что:

$$\begin{cases} X''_{\text{эКВ}}(t, \lambda) = \frac{1}{p} \cdot (x'(t) - v) + \lambda \cdot \frac{\dot{y}'(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}, \\ Y''_{\text{эКВ}}(t\lambda) = y'(t) - \lambda \cdot \frac{\dot{x}'(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \cdot \frac{1}{p}, \end{cases} \quad (1)$$

где $p = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, c — скорость света.

Итак, система (1) описывает семейство эквидистант видоизменной кривой $r(t)$, расположенных на расстоянии λ от неё в любой момент времени (поэтому для удобства положили время $\tau = 1$).

Случай 2. Сначала для исходной кривой $r(t)$ построим семейство эквидистант.

Их движение будет осуществляться в произвольном направлении, поэтому повернём систему на угол φ , как в случае 1.

Осталось придать скорость, вектор которой будет сонаправлен с осью Ox' , и применить преобразования Лоренца:

$$\begin{cases} X''_{\text{эКВ}}(t, \lambda) = \frac{1}{p}(x'(t) - v) + \lambda \cdot \frac{\dot{y}'(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \cdot \frac{1}{p}, \\ Y''_{\text{эКВ}}(t\lambda) = y'(t) - \lambda \cdot \frac{\dot{x}'(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}. \end{cases} \quad (2)$$

Из систем (1) и (2) видно, что полученные семейства эквидистант не совпадают. Значит, эквидистантность нарушается при движении кривой с семейством своих параллельных кривых.

Замечание. Эквидистантность сохраняется, если исходная кривая является прямой.

Литература

1. Бортников А.А. Об эквидистантах некоторых кривых / Бортников А.А., Стенюхин Л.В. // Воронежская зимняя математическая

школа С. Г. Крейна – 2026 : материалы Международной Воронежской зимней математической школы. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2026. — С. 43–45.

2. Бортников А.А. Об эквидистантах экспоненты / Бортников А.А., Стенюхин Л.В. // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XXXVI : материалы Международной Воронежской весенней математической школы, посвященной памяти С. М. Никольского. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2025. — С. 81–82.

3. Бортников А.А. Об эквидистантах эллипса / Бортников А.А., Гладких К.И., Торшина В.А., Стенюхин Л.В. // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2025. — С. 78–79.

4. Лебедева Ю.А. Оценка кривизны многообразия для прохождения твёрдого тела / Лебедева Ю.А., Стенюхин Л.В. // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2023. — № 2. — С. 73–82.

СВОЙСТВА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ДРОБНОЙ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ

Ю.Н. Булатов (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)

y.bulatov@bk.ru

Рассматриваемая задача поставлена профессором Ляховым Л.Н. и автор выражает ему глубокую благодарность.

Пусть $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x: x_i > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x: x_i \geq 0\}$, $i = \overline{1, n}$ и мультииндекс $-\gamma = (-\gamma_1, \dots, -\gamma_n)$ имеет фиксированные параметры $-\gamma_i \in (-1, 0)$. Сингулярный дифференциальный оператор Киприянова имеет вид:

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{-\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Согласно [1] число $-|\gamma| = -\gamma_1 - \dots - \gamma_n$ называется коэффициентом скрытой сферической симметрии, а число $n - |\gamma| > 0$ псевдоевклидовой размерностью области определения функций, заданных в евклидовом пространстве \mathbb{R}_n . В этих исследованиях предполагается, что $0 < n - |\gamma| < 1$.

В [2] для всех значений параметра $-\gamma_i > -1$ получена формула Киприянова—Бельтрами, из которой для любой четной по каждой координате аргумента [3, с.21], дважды непрерывно дифференцируемой функции $u=u(x)$, $x \in \mathbb{R}_n$ следует равенство

$$\Delta_{B_{-\gamma}} u(|x|) = (B_{-\sigma})_r u(r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad -\sigma = n - |\gamma| - 1.$$

Весовая билинейная форма в \mathbb{R}_n^+ , отвечающая параметру $-\gamma$ вводится следующим выражением:

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n^+} u(x) v(x) x^{-\gamma} dx, \quad x^{-\gamma} dx = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} dx_i. \quad (1)$$

В качестве основного пространства функций выбирается подпространство Шварца $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$, четных по каждой переменной функций, быстро убывающих со всеми производными. Ассоциированное пространство обобщенных функций, определяемое весовой билинейной формой (1), обозначается $S'_{ev, -\gamma}$.

Определение 1. *Регулярное распределение $\mathcal{E}_{-\gamma} \in S'_{ev}$ называется фундаментальным решением В-гиперболического оператора*

$$\square_{-\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_{B_{-\gamma}}, \quad a > 0, \quad (2)$$

если оно удовлетворяет уравнению

$$\square_{-\gamma} \mathcal{E}_{-\gamma}(x, t) = \delta_{-\gamma}(|x|) \delta(t) \iff (\mathcal{E}_{-\gamma}, \square_{-\gamma} \varphi(x, t))_{-\gamma} = \varphi(0),$$

где $(x, t) \in \mathbb{R}_n^+ \times (0, \infty) = \mathbb{R}_+^{n+1}$, $\delta_{-\gamma}(|x|)$ – весовая $\delta_{-\gamma}$ -функция Дирака, сосредоточенная в точке $|x| = 0$, определяемая равенством $(\delta_{-\gamma}, \varphi)_{-\gamma} = \varphi(0)$, $\forall \varphi \in C_{ev}^\infty(\mathbb{R}_+^1)$, а φ – произвольная основная функция из соответствующего пространства.

Фундаментальное решение $\mathcal{E}_{-\gamma}(|x|, t)$ В-гиперболического оператора (2) имеет следующий вид [4]:

$$\mathcal{E}_{-\gamma}(r, t) = \frac{1}{|S_1(n)|_{-\gamma}} \frac{2^{-\mu} r^\mu}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\mu-1}}{\sqrt{a^2 t^2 - \tau r^2}} d\tau, \quad \mu = \frac{\sigma + 1}{2}.$$

Теорема 1. *Пусть $0 < n - |\gamma| < 1$, тогда фундаментальное решение $\mathcal{E}_{-\gamma}(|x|, t)$ В-гиперболического оператора (2) принадлежит классу C^∞ по переменной t на интервале $(0, \infty)$ и как функция переменной t удовлетворяет в классе распределений $S'_{ev, -\gamma}$ следующим предельным соотношениям:*

$$\mathcal{E}_{-\gamma}(|x|, t) \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_{-\gamma}(|x|, t)}{\partial t} \xrightarrow{t \rightarrow +0} \delta_{-\sigma}(r), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{-\gamma}(|x|, t)}{\partial t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0,$$

где $\delta_{-\sigma}(r)$ – весовая $\delta_{-\sigma}$ -функция Дирака, сосредоточенная в точке $r = 0$, определяемая равенством $(\delta_{-\sigma}, \varphi)_{-\sigma} = \varphi(0)$, $\forall \varphi \in C_{ev}^{\infty}(\mathbb{R}_+^1)$.

Литература

1. Ляхов Л. Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.
2. Ляхов Л. Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Математические заметки. — 2023. — Т. 113, № 4. — С. 517–528.
3. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — Москва. : Наука, 1997. — 208 с.
4. Ляхов Л. Н. Фундаментальное решение B -гиперболического уравнения с отрицательными параметрами / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов // Дифференциальные уравнения. — 2025. — Т. 61, № 12. — С. 1633–1647.

О СЕТЯХ РИСКА

Е.В. Булинская (Москва, МГУ)

ebulinsk@yandex.ru

Сети риска приобрели популярность в последнее десятилетие, см., например, [1 - 5].

Основное внимание в докладе будет уделено моделям страхования (хотя во многих случаях будет указано, как аналогичные модели возникают и в других приложениях).

В качестве управления (контроля) часто выступают конфигурация рассматриваемой сети, перестрахование и инвестиции, которые поступают от акционеров изучаемой страховой компании. Различаются 3 случая: инвестиции проводятся в безрисковые активы (облигации), в рисковые (акции) и в оба типа активов.

Полученные утверждения относятся к выбору оптимальных инвестиций, предельному поведению капитала компании при неограниченном возрастании горизонта планирования, а также устойчивости рассматриваемой системы. Исследуются также получаемые дивиденды и нахождение наиболее приемлемых порогов для их выплаты.

Литература

1. Avram F. On Central Branch/Reinsurance Risk Networks: Exact Results and Heuristics. / F. Avram, S.-H. Loke // Risks. — 2018. — V. 6, N 2, P. 35.
2. Булинская Е.В. Модели страхования с дискретным временем. / Е.В. Булинская // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1: Математика, Механика — 2023. — № 6, — С. 42–52.
3. Bulinskaya E.V. New Research Directions in Modern Actuarial Sciences / E.V. Bulinskaya. // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2017. — V. 208, — P. 349–408.
4. Gerber H.U. On the time value of ruin. / H.U. Gerber and E.S.W. Shiu // North American Actuarial Journal. — 1998. — V. 2, № 1, P. 48–72.
5. Боровков А.А. Обобщенные процессы восстановления. / А.А. Боровков. — М. : РАН, 2020. — 455 с.

ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ¹

С.А. Бутерин (Саратов, СГУ)
buterinsa@sgu.ru

Рассмотрим систему управления, описываемую операторно-дифференциальным уравнением

$$\ell y := \frac{d^m}{dt^m} (By^{(n)} + Cy) = u(t), \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

где m и n — целые неотрицательные числа, B — ограниченная биекция $L_2(0, T)$ на $L_2(0, T)$, дифференцирование понимается в смысле распределений, а оператор C имеет вид

$$Cy = \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0)u_k(t), \quad u_k \in L_2(0, T), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Обозначим $N := n + m$. Принадлежность $\ell y \in L(0, T)$ влечет

$$y^{(k)} := \frac{d^{k-n}}{dt^{k-n}} (By^{(n)} + Cy) \in AC[0, T], \quad k = \overline{n, N-1},$$

¹ Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 25-21-00714, <https://rscf.ru/project/25-21-00714/>.

© Бутерин С.А., 2026

а соответствующие $y \in W_2^n[0, T]$ всюду плотны в $L_2(0, T)$.

В [1] установлено, что в виде (1) представимы, в частности, дифференциальные уравнения с коэффициентами из негативных соболевских пространств (см., например, [2]), равно как и различные системы управления с отклоняющимся аргументом [3–5].

Требуется найти управление $u \in L_2(0, T)$, переводящее рассматриваемую систему из начального состояния

$$y^{(k)}(0) = \varphi_{k,0} \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2)$$

где $y^{(k)} := y^{(k)}$ при $k = \overline{0, n-1}$, в конечное состояние

$$y^{(k)}(T) = \varphi_{k,1} \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (3)$$

и минимизирующее затрачиваемые при этом усилия $\|u\|_{L_2(0,T)}$.

Очевидно, всякое решение y уравнения (1) при $u \in L_2(0, T)$ принадлежит гильбертовому пространству типа Соболева

$$W_2^{N,\ell} := \left\{ z : z^{(k)} \in AC[0, T], k = \overline{0, N-1}, \ell z \in L_2(0, T) \right\}$$

с нормой

$$\|z\|_{W_2^{N,\ell}} := \sqrt{\sum_{\nu=0}^{N-1} |z^{(\nu)}(0)|^2 + \|\ell z\|_{L_2(0,T)}^2}.$$

Таким образом, приходим к вариационной задаче

$$\int_0^T |\ell y(t)|^2 dt \rightarrow \min \quad (4)$$

на функциях $y \in W_2^{N,\ell}$, удовлетворяющих условиям (2) и (3).

Теорема 1. *Задача (2)–(4) имеет единственное решение y , причём $\|y\|_{W_2^{N,\ell}} \leq K \max |\varphi_{k,\nu}|$, где K не зависит от чисел $\varphi_{k,\nu}$.*

Теорема 2. *Задача (2)–(4) равносильна краевой задаче*

$$\frac{d^n}{dt^n} B^* \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} (By^{(n)} + Cy) = 0, \quad 0 < t < T,$$

при условиях (2) и (3), где B^* — оператор, сопряженный к B .

Литература

1. Бутерин С.А. Операторно-дифференциальные выражения: регуляризация и полнота корневых функций / С.А. Бутерин // Матем. сб. — 2026. — Т. 217, № 7. (в печати)

2. Мирзоев К.А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями / К.А. Мирзоев, А.А. Шкаликов // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 5. — С. 788–793.

3. Скубачевский А.Л. К задаче об успокоении системы управления с последствием / А.Л. Скубачевский // Докл. РАН — 1994. — Т. 335, № 2. — С. 157–160.

4. Россровский Л.Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции / Л.Е. Россровский // Современ. матем. Фундам. направл. — 2014. — Т. 54. — С. 3–138.

5. Бутерин С.А. Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последствием на дереве / С.А. Бутерин // Матем. заметки. — 2024. — Т. 115, № 6. — С. 825–848.

О ВЫРОЖДЕНИИ МЕТОДА КАЛИБРОВКИ СООСНОСТИ ДАТЧИКОВ БИНС НА ОСНОВЕ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Д. А. Бухонов (Воронеж, ВГУ)

Рассматривается задача калибровки соосности инерциальных датчиков бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), являющейся частным случаем задачи Вабы [1]. Предполагается, что сигнал термокомпенсирован и откалиброван по смещениям и масштабам [2]. Цель работы — исследование условий применимости метода, основанного на сингулярном разложении матрицы измерений.

Используются следующие системы координат: нормальная система координат (НСК) ${}^gX {}^gY {}^gZ$, объектная система координат (ОСК) ${}^oX {}^oY {}^oZ$ и приборная система координат (ПСК) ${}^iX {}^iY {}^iZ$. Центры координат во всех системах отсчёта фиксированы относительно объекта, все системы являются левыми ортонормированными системами координат.

В НСК ось $O {}^gX$ совпадает с направлением на Север, ось $O {}^gY$ — с направлением на Восток, $O {}^gZ$ дополняет до левой тройки. В ОСК оси $O {}^oX$ и $O {}^oY$ направлены вдоль продольной и поперечной осей объекта, а $O {}^oZ$ дополняет до левой тройки. Оси ПСК направлены вдоль осей чувствительности ИД. Матрицу перехода от базиса i к базису O обозначаем oM .

Рассмотрим метод. Объект устанавливается так, чтобы с осью $O {}^oZ$ совпадала одна из осей ОСК, затем вращением вокруг этой оси

на углы $2\pi/N$ получается N различных положений. В каждом положении производится измерение инерциальной величины \mathbf{i} . Составим матрицу измерений:

$$\mathbf{X} = ({}^i\mathbf{i}_0, {}^i\mathbf{i}_1, \dots, {}^i\mathbf{i}_{N-1}). \quad (1)$$

где ${}^i\mathbf{i}_k$ — вектор-столбец измерений в k -м положении. Метод заключается в выполнении сингулярного разложения $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ и в выборе среди строк \mathbf{U} вектора, наиболее близкого к оси вращения (в смысле наибольшего скалярного произведения). Поскольку осью вращения является $O^\circ Z$, этот вектор можно считать оценкой её направляющего вектора. Аналогично находятся векторы для осей $O^\circ X$ и $O^\circ Y$.

Обозначим через φ угол между \mathbf{i} и горизонтальной плоскостью. Показано, что метод вырождается при значениях $\varphi = \pm \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. не даёт решения, а для других значений φ — работает корректно. В случае, когда инерциальные датчики — это датчики угловой скорости, \mathbf{i} — это вектор угловой скорости вращения Земли и φ — это широта расположения БИНС.

Пусть ${}^o\mathbf{i}_k$ — значения инерциальной величины в k -м положении в ОСК, $U = \|\mathbf{i}\|$, α_0 — угол курса начального положения ИД, $\alpha_k = \alpha_0 + \frac{2\pi k}{N}$. Положим

$$\mathbf{Y} = ({}^o\mathbf{i}_0, {}^o\mathbf{i}_1, \dots, {}^o\mathbf{i}_{N-1}). \quad (2)$$

В силу того, как проводятся измерения, \mathbf{Y} имеет вид:

$$\mathbf{Y} = U \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \alpha_0 & \cos \varphi \cos \alpha_1 & \dots & \cos \varphi \cos \alpha_{N-1} \\ \cos \varphi \sin \alpha_0 & \cos \varphi \sin \alpha_1 & \dots & \cos \varphi \sin \alpha_{N-1} \\ \sin \varphi & \sin \varphi & \dots & \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В работе найдены сингулярные числа [3] матрицы \mathbf{Y} :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = U \sqrt{\frac{N}{2}} |\cos \varphi|, \quad \sigma_3 = U \sqrt{N} |\sin \varphi|. \quad (4)$$

Также доказано, что если они различны, направляющий вектор оси восстанавливается с точностью до знака, а в случае равенства сингулярных чисел метод вырождается. Таким образом, метод теряет корректность при $|\varphi| = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$, а при $|\varphi| \neq \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$ даёт решение задачи.

Работа выполнена при сотрудничестве АО «Концерн «Созвездие» и ФГБОУ ВО ВГУ в рамках передовой инженерной школы «Российская электроника, инфокоммуникации и радиосвязь». Автор благодарит Вострова А.Ю. за постановку задачи и ценные замечания при ее решении.

Литература

1. Markley F. L. Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition // Journal of the Astronautical Sciences. — 1988. — Vol. 36, No. 3. — P. 245–258.
2. Козлов А. В. Динамическая стендовая калибровка бескарданных инерциальных навигационных систем / А. В. Козлов, Н. А. Парусников, Н. Б. Вавилова // Известия ЮФУ. Технические науки. — 2018. — № 1. — С. 241–257.
3. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и основы алгебры. — М. : МЦНМО, 2025. — С. 316–318.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ¹

Е. В. Бычков, А. А. Замышляева,
Г. А. Свиридюк (Челябинск, ЮУрГУ (НИУ))
bychkovev@susu.ru

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область с границей \mathcal{D} класса C^∞ , $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $T \in \mathbb{R}_+$. В цилиндре $D \times (0, T)$ рассмотрим модифицированное уравнение Буссинеска

$$L \overset{\circ}{x}^{(2)} + Mx + N(x) = u(s, t), \quad (1)$$

$L = (\lambda - \Delta)$, $M = -\alpha^2 \Delta$, $N(x) = -\Delta(x^3)$ с условием Дирихле

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \mathcal{D} \times (0, T) \quad (2)$$

и начальными условиями Шоултера — Сидорова

$$L(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, \quad L(\overset{\circ}{x}(s, 0) - x_1(s)) = 0, \quad (3)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда проект № 24-11-20037, <https://rscf.ru/project/24-11-20037/>.

© Бычков Е. В., Замышляева А. А., Свиридюк Г. А., 2026

где $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{x}$ и $\overset{\circ}{x}^{(2)}$ — производные Нельсона — Гликлиха первого и второго порядков стохастического процесса x по времени. Уравнение (1) описывает различные, например, моделирует распространение длинных волн в мелководье с учетом капиллярных эффектов, а нелинейный член отвечает за конвективную инерцию. В этом случае функция $x = x(s, t)$ определяет высоту волны. Введем пространство управления \mathfrak{U} и выберем в нём непустое, замкнутое и выпуклое множество допустимых управлений \mathfrak{U}_{ad} . Для стохастической математической модели (1)–(3) поставим задачу оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}. \quad (4)$$

Решение задачи (1)–(4) будем искать в виде: $x = y + \eta$, $y = E(x)$, $E(\eta) = 0$. Математическое ожидание y — решение детерминированной задачи оптимального управления:

$$\begin{aligned} Ly''_{tt} + My + N(y) &= u(s, t), \quad (s, t) \in D \times (0, T), \\ y(s, t) &= 0, \quad (s, t) \in \partial D \times (0, T), \\ L(y(s, 0) - y_0(s)) &= 0, \quad L(y'_t(s, 0) - y_1(s)) = 0, \quad s \in D, \end{aligned} \quad (5)$$

Определим функционал следующим образом:

$$J(x, u) = J(y, u) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}, \quad (6)$$

Зададим пространство случайных величин $\mathfrak{X}_K \mathbf{L}_2 ((\mathfrak{X}_K \mathbf{L}_2)^*)$. Оно гильбертово по норме

$$\|\eta\|_{\mathfrak{X}_K \mathbf{L}_2}^2 = E \int_D \eta^2 ds = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^2 D(\eta_k).$$

Пространство $\mathfrak{N}_K \mathbf{L}_2$ банахово пространство с нормой

$$\|\eta\|_{\mathfrak{N}_K \mathbf{L}_2}^4 = E \int_D \eta^4 ds = E \int_D \left(\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \eta_k \varphi_k \right)^4 ds.$$

Зная функцию управления u и математическое ожидание y , найдем стохастический процесс x , выполняя обратную подстановку $x = \eta + y$, и возвращаемся к следующей задаче:

$$\begin{aligned} L \overset{\circ}{x}^{(2)} + Mx + N(x) &= u(t), \quad (s, t) \in D \times (0, T), \\ x(s, t) &= 0, \quad (s, t) \in \partial D \times (0, T), \\ L(x(s, 0) - x_0) &= 0, \quad L(\overset{\circ}{x}(s, 0) - x_1) = 0, \quad s \in D. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема. Пусть $\lambda \geq \lambda_1$, тогда для любых $x_0 = y_0 + \eta_0$, $x_1 = y_1 + \eta_1$, где $\eta_0 \in \mathfrak{N}_K \mathbf{L}_2$, $\eta_1 \in \mathfrak{X}_K \mathbf{L}_2$, $y_0 = E(x_0) \in \mathfrak{N}$, $y_1 = E(x_1) \in \mathfrak{X} \cap \text{coim} L$ и любых $T \in \mathbb{R}^+$ существует решение задачи оптимального управления (1)–(4) вида $(x, u) = (y + \eta, u)$, где (y, u) является решением задачи (5), (6), а x является решением задачи (7).

Литература

1. Bychkov E.V. Optimal control problem for one mathematical model of hydrodynamics with random initial data / E.V. Bychkov, A.A. Zamyshlyayeva, G.A. Sviridyuk // Global and Stochastic Analysis. — 2025. — Vol. 12, № 5. — С. 67–78.

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Б. Васильев, Явар Муджтаба, А.С. Тарасова

(Белгород, НИУ «БелГУ»)

vbv57@inbox.ru

Пусть \mathbb{Z}^{m+1} – целочисленная решетка в \mathbb{R}^{m+1} , $C = C_+^{a_n} \times (0; +\infty)$, где $C_+^{a_n} = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > a_n |x'|, a_n > 0, a_n \text{ может принимать значения } n, 1/n, n \in \mathbb{N}\}$. Для функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{m+1}) \in h\mathbb{Z}^{m+1}$, $h > 0$, можно определить дискретное преобразование Фурье $\tilde{u}_d(\xi)$ [1], $\mathbb{T}^{m+1} \equiv [-\pi, \pi]^{m+1}$, $\tilde{h} = h^{-1}$.

С помощью разделенных разностей и их дискретных преобразований Фурье мы определим дискретные пространства Соболева–Слободецкого $H^s(C_d)$ для исследования разрешимости уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in C_d \quad (1)$$

Пространство $\overline{H^s(C_d)}$ состоит из дискретных функций из пространства $H^s(h\mathbb{Z}^{m+1})$, чьи носители содержатся в $\overline{C_d}$. Норма в пространстве $\overline{H^s(C_d)}$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ [1,3].

Если $\tilde{A}_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция в \mathbb{R}^{m+1} с основным кубом периодов $\tilde{h}\mathbb{T}^{m+1}$, то дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $\tilde{A}_d(\xi)$ в дискретном конусе C_d определяется как оператор вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^{m+1}} h^{m+1} \int_{\tilde{h}\mathbb{T}^{m+1}} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in C_d,$$

Рассматривать класс символов, удовлетворяющих условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \leq |\tilde{A}_d(\xi)| \leq c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с постоянными c_1, c_2 , не зависящими от h .

Ключевую роль в исследовании играет понятие периодической волновой факторизации эллиптического символа $\tilde{A}_d(\xi)$ с индексом $\mathfrak{a}[3]$ - специальное представление в виде

$$\tilde{A}_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi)A_{d,=}(\xi).$$

Теорема Если символ $\tilde{A}_d(\xi)$ допускает волновую факторизацию с индексом \mathfrak{a} таким, что $\mathfrak{a} - s = -n + \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, $|\varepsilon| < 1/2$, то для того, чтобы уравнение (1) имело единственное решение в пространстве $H^s(C_d)$ для правой части $v_d \in H^{s-\alpha}(C_d)$ необходимо и достаточно выполнения условий

$$\Delta_{m+1}^{(j-1)} A_{d,=}(lv_d) \Big|_{C_+^{a_n}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где lv_d - произвольное продолжение v_d на $H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^{m+1})$

Доказательство теоремы основано на специальном представлении интеграла с ядром Гильберта

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} \int_{-h\pi}^{h\pi} \operatorname{ctg} \frac{h(\eta - t)}{2} \varphi(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^n c_j (e^{ih\eta} - 1)^{-j} + (e^{ih\eta} - 1)^{-n} \frac{h}{2} \int_{-h\pi}^{h\pi} \operatorname{ctg} \frac{h(\eta - t)}{2} \varphi(t) (e^{ith} - 1)^n dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{(1 - \tau^n) \varphi(\tau) d\tau}{\tau + 1}, \\ c_j &= \int_{\mathbb{S}^1} \tau^{j-1} \varphi(\tau) d\tau = ih \int_{-h\pi}^{h\pi} (e^{iht} - 1)^{j-1} \varphi(t) dt, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Для случая $C = \mathbb{R}^{m-1}$ некоторые результаты о разрешимости уравнения (1) содержатся в работе [2].

Литература

1. Vasilyev A. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space / A. Vasilyev, V. Vasilyev // Math. Model. Anal. — 2018. — V. 23, No. 3. — P. 492–506.
2. Vasilyev A. V. Discrete boundary value problems as approximate constructions / A.V. Vasilyev, V.B. Vasilyev, O.A. Tarasova // Lobachevskii J. Math. — 2023. — V. 43, No. 6. — P. 1446–1457.
3. Васильев В.Б. О дискретной краевой задаче в четверти плоскости / В.Б. Васильев, А.А. Машинец // Вестник российских университетов. Математика, — 2023. — Т.28, №142. — С. 169–181.

ГАУССОВА КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТИ

М. Б. Виситаева

(Грозный, ФГБОУ ВО «ЧГУ им. А. А. Кадырова»)

esm276932@gmail.com

На кривых поверхностях следует рассматривать геодезические линии, как аналоги прямых на плоскости, при этом во втором случае прямые рассматривать на всем их протяжении, а во втором — малые куски, с точки зрения дифференциальной геометрии.

Кривизна — это величина, характеризующая отклонение кривой (поверхности) в окрестности данной ее точки от касательной прямой (касательной плоскости). Понятие кривизны распространяется также и на объекты более общей природы. Например, в римановой геометрии кривизна представляет собой меру отклонения так называемых римановых пространств от евклидовых [5].

Рассмотрим кривизну Гаусса (гауссову кривизну), или искривленность, обозначаемую $K = k_1 \times k_2$, где k_1 — наибольшая главная кривизна, k_2 — наименьшая главная кривизна, k_1 и k_2 перпендикулярны друг к другу (рис. 1).

Главная кривизна $k_i = \frac{1}{r_i}$. Искривленность K не изменяется при изгибании поверхности, длины и углы кривых на ней остаются неизменными (поверхность сделана из абсолютно нерастяжимого материала, к примеру, из бумаги, жести) [5].

Выберем поверхности, гауссова кривизна которых положительна, в качестве примера рассмотрим шаровую поверхность (сферу). На плоскости две прямые имеют не более одной точки, поэтому нужно

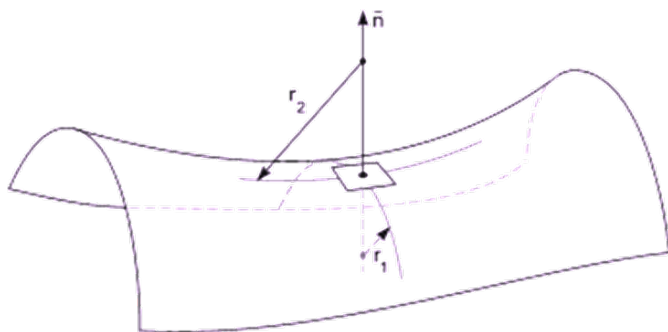


Рис. 1: Искривленность поверхности [5]

провести некоторые допущения для сферы. «В сферической геометрии прямые (большие круги) пересекаются в двух точках. В эллиптической геометрии эти две точки противоположны друг другу и являются представителями одной и той же точки» [1, с. 73]. В случае выхода какой-то части сферической фигуры за пределы граничного круга, мы заменим точки, попадающие вне рассматриваемого полушария, диаметрально противоположными точками, которые априори будут находиться на исходном полушарии [2].

Если для некоторого пространства кривизна Гаусса $K = 0$, то мы имеем дело с пространством Евклида, в котором справедлива геометрия Евклида. При $K > 0$ мы переходим к пространству и геометрии Римана (рис. 2б), а при $K < 0$ мы приходим к геометрии Лобачевского-Бойяи (рис. 2а) [4].

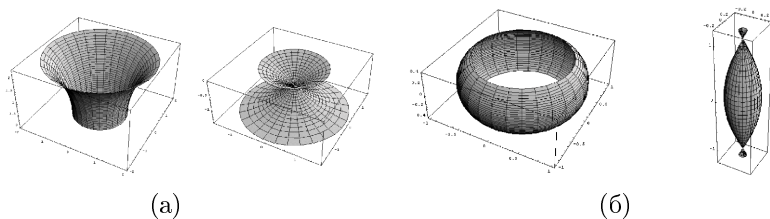


Рис. 2: Поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны (а) и постоянной положительной кривизны (б) [4]

«Если гауссова кривизна всюду положительна, то это — строго выпуклая поверхность» [3, с. 90]. Согласно теореме Гаусса (theorema

egregium) гауссова кривизна поверхности не меняется при изгибаниях (изометриях). Отсюда, в частности, следует, что никакую сколь угодно малую часть сферы нельзя изогнуть на плоскость. Изометрично изгибаемые (развертывающиеся) на плоскость поверхности должны обладать нулевой, полной кривизной. Примерами развертывающихся поверхностей являются цилиндр и конус, принадлежащих классу линейчатых поверхностей [6]. Таким образом, для геометрии Евклида гауссова кривизна равна нулю.

Литература

1. Виситаева М. Б. Из истории геометрических систем: Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2026 : материалы межд. Воронежской зимней математической школы (24–26 января 2026) г. / под ред. Д. Б. Костина: Воронежский государственный университет; Передовая Воронежская школа ВГУ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2026. — С. 72–75.

2. Гильберт Д., С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия / Пер. с нем. Изд. 4-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 344 с.

3. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. 2-е изд. перераб. — М.: Наука, 1986. — 780 с.

4. Лекции по классической дифференциальной геометрии А. О. Иванов, А. А. Тужилин. <https://dfgm.math.msu.su/files/Term1.pdf> (дата обращения 20.03.2026).

5. Мухин О. И. Компьютерная графика Часть III / Лекция 18. Искривленность пространства (электронный учебник) <https://stratum.ac.ru/education/textbooks/kggrafic/lection18.html> (дата обращения 20.03.2026).

6. Геометрические характеристики новейших тектонических движений земной коры Северной Евразии А. Ф. Грачев, Ш. А. Мухамедиев, В. А. Николаев. — Российский журнал наук о Земле. — Том 2, № 1, Февраль 2000. <https://rjes.wdcb.ru/rus/v02/rje00034/part4.htm> (дата обращения 20.03.2026).

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВЕРХНИХ И НИЖНИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНОГО

УСЛОВИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВО ВРЕМЕНИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ¹

Юйсюань Вэй, Хань Чэн, Н.Т. Левашова

(Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)

591056451@qq.com, chenghan999999@qq.com,

levashovant@physics.msu.ru

Рассмотрим следующую краевую задачу с периодическими условиями по времени:

$$\begin{cases} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -u \frac{\partial u}{\partial x} + q(t)u \\ (x, t) \in D := \{x \in (-1, 1); t \in \mathbb{R}\} \\ u(-1, t) = u_{\text{left}}(t), u(1, t) = u_{\text{right}}(t), t \in \mathbb{R} \\ u(x, t) = u(x, t + T), x \in [-1, 1], t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

где ε – малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$), функции $u_{\text{left}}(t)$, $u_{\text{right}}(t)$ и $q(t)$ – достаточно гладкие T -периодические по переменной t , $q(t) > 0$.

Цель обратной задачи является определить функцию $h_0(t)$, чтобы за время $t = T$ получить заданное распределение функции $f(x) = \int_0^T u(x, t) dt$, $x \in [-1, 1]$.

Обратная задача решается путем минимизации функционала

$$J[h_0(t)] = \int_{-1}^1 \left(\int_0^T U_0(x, t, h_0(t)) dt - f(x) \right)^2 dx + \alpha \int_0^T (h_0(t))^2 dt. \quad (2)$$

Здесь $f(x)$ – наблюдаемая функция. U_0 – нулевое приближение задачи (1). Последнее слагаемое является регуляризатором, предназначенным для сглаживания функции.

Для примера решения задачи управления были выбраны следующие параметры: $u_{\text{left}}(t) = -20 + \sin(t); q(t) = 5 + \cos(t)$. В качестве требуемого асимптотического закона движения фронта была выбрана функция $x_0 = 0.3 \sin(2t)$, тогда $h_0(t) = -2q(t)x_0(t) - u_{\text{left}}(t) = -0.6 \sin(2t)(5 + \cos(t)) + 20 - \sin(t)$. Изменяем численное решение прямой задачи и используем его в качестве новой наблюдаемой функции, после чего проводим оптимизацию. Оптимизированную функ-

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ им. М.В. Ломоносова.

цию $h_0(t)$ подставляем в прямую задачу и находим численное решение u_{num} . Вводим функцию $F(x) = \left| \int_0^T u_{\text{num}} dt - f(x) \right|$ в качестве критерия оценки оптимизации.

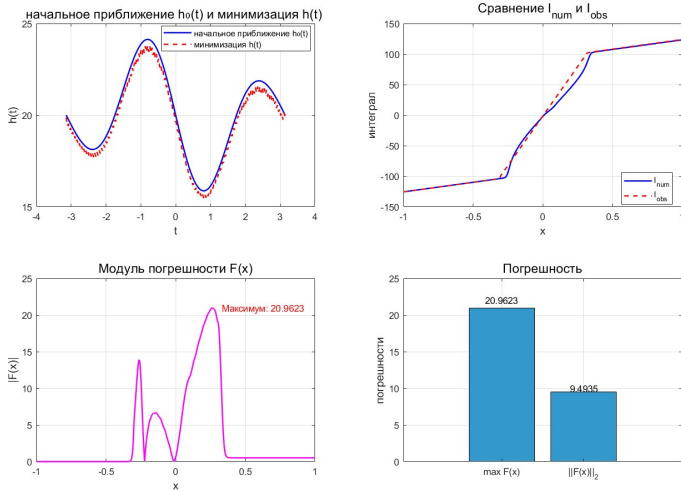


Рис. 1. Соединение

Литература

1. Nefedov N. Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations /N. Nefedov, L. Recke, K. Schneider // J. of Math. Analysis and Appl. — 2013 — V. 405, № 1. — P. 90–103.
2. Волков В.Т. Асимптотическое решение коэффициентных обратных задач для уравнений типа Бюргера / В.Т. Волков, Н.Н. Нефедов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2020 — Т. 60, № 6. — С. 975–984.

КОМПОЗИЦИЯ ОПЕРАТОРА НЕЙРОСЕТЕВОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И МЕТОДА СОБОЛЯ-СТАТНИКОВА

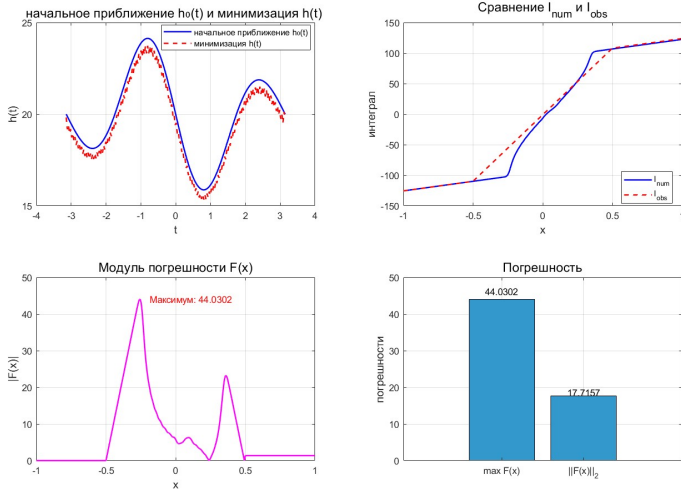


Рис. 2. расширение

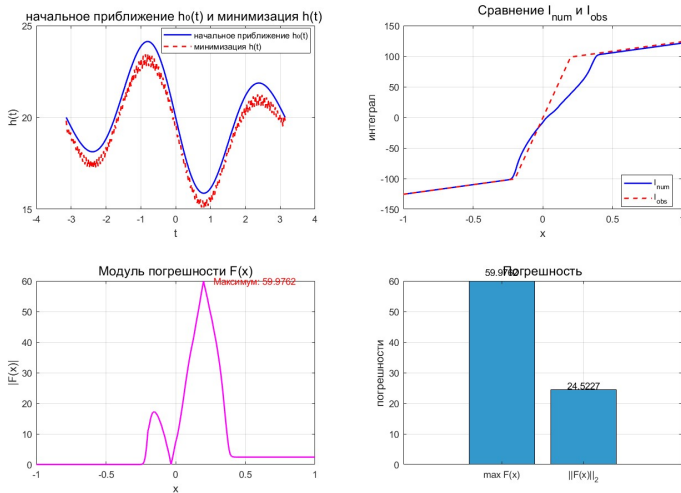


Рис. 3. уточнение

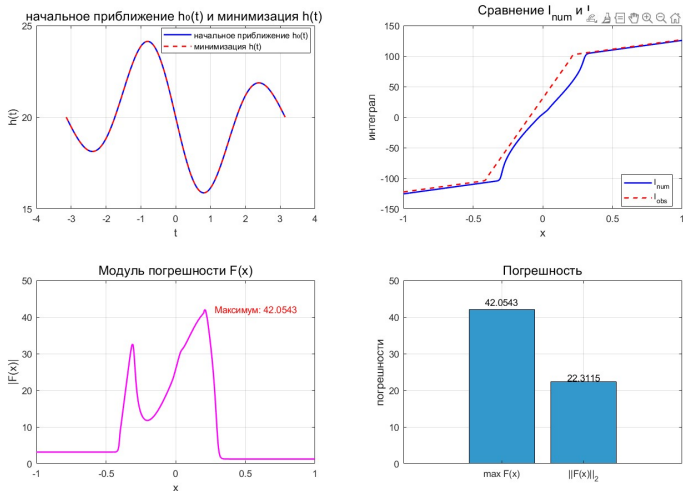


Рис. 4. сдвиг

В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Н.Т. Габдрахманова (Москва, РУДН)
gabdrakhmanova-nt@rudn.ru

Рассматривается задача многокритериальной оптимизации параметров управления динамической системы. Для решения задачи использована композиция нейросетевых моделей и метод многокритериальной оптимизации Соболя -Статникова. Метод Соболя - Статникова обладает высокой теоретической обоснованностью, вместе с тем, при его применении в реальных исследованиях порой возникают проблемы, в частности, проблемы связанные с требованиями к данным. Например, не всегда данные, представленные исследователям, являются репрезентативными. Ключевая идея разработанного метода заключается в построении высококачественной нейросетевой модели идентификации по данным наблюдений. В работе для построения нейросетевых моделей использованы сверточные нейросети и метод тонкой настройки нейросетей. Современные задачи оптимизации, как правило, являются многокритериальными [1-4]. В насто-

ящее время, достаточно хорошо разработаны всевозможные способы сведения многокритериальной задачи к задаче однокритериальной. Например, с помощью применения сверток, можно многокритериальную задачу оптимизации привести к однокритериальной и затем, решить ее с помощью таких эффективных методов как байесовская оптимизация [2] или СМА-ES [3]. Однако, при этом, существует следующая опасность: в результате сведения многокритериальной задачи к однокритериальной исходная проблема подменяется новой, и в результате решается не та задача.

1. Метод Соболя Статникова. Последовательности ЛП-тау. В методе Соболя - Статникова в качестве пробных точки (или точек зондирования области исследования) использованы точки ЛПтау-последовательностей, которые являются наиболее равномерно распределенными среди всех известных в настоящее время последовательностей. Многочисленные эксперименты, проведенные с целью сравнения ЛП-поиска с простейшим случайным поиском, неизменно показывали преимущество ЛП-поиска [1]. Проведены числовые эксперименты по сравнению методов Соболя - Статникова и СМА-ES. Эксперименты показали, что методов Соболя - Статникова превышает метод СМА-ES по скорости и по точности решения задачи.

2. Нейросетевые модели. При решении задачи оптимизации методом Соболя- Статникова важна репрезентативность данных в допустимой области параметров управления. Зачастую, значения функциональных критериев в точках зондирования неизвестны. Для того, чтобы вычислять значения функциональных критериев в новых точках (точках зондирования), предлагается использовать нейросетевую модель (НС). Для построения НС высокой точности, были проведены исследования фазового пространство динамической системы с помощью методов статистического анализа и топологического анализа данных. После выделения кластеров, были построены НС архитектуры CNN. Для некоторых кластеров использован метод тонкой настройки нейросети.

Проведенные эксперименты на модельных и натуральных данных показали удовлетворительные результаты.

Литература

1. Sobol I. M., Statnikov R. B. Selection of optimal parameters in problems with many criteria. — Moscow: Nauka, 1981.

2. Theory, algorithms, and experiments in applied optimization. // edited by Goldengorin B. Springer Optimization and Its Applications ISBN 978-3-031-91356-3 — 2024.

3. Hansen, N. The CMA Evolution Strategy: A Tutorial. arXiv:1604.00772. — 2016.

4. Jastrebski, G.A.; Arnold D.V. Improving Evolution Strategies through Active Covariance Matrix Adaptation //IEEE World Congress on Computational Intelligence, Proceedings. IEEE. pp. 9719–9726. doi:10.1109/CEC.2006.1688662

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ СООБЩЕСТВ

В.В. Гандилян (Москва, МТУСИ)

v.gandilyan@mtuci.ru

С начала 20-го века, начиная с Вито Вольтерра, построен ряд динамических и стохастических математических моделей, описывающих взаимодействие биологических сообществ [1-4].

Если климатические условия не меняются и случайные природные процессы не происходят, то в некотором замкнутом регионе взаимодействия биологических видов носят определенный закономерный характер. Воздействия человека на динамику взаимодействия биологических видов требуют тщательного изучения его последствий.

Рассмотрим следующую модель: пусть в некотором замкнутом регионе существует n биологических видов. Численность i -го вида в момент времени t : $x_i(t)$. Также пусть существует m вторичных ресурсов, которые используются этими видами. Будем рассматривать поступление j -го вида ресурса постоянным и равным ρ_j . Если единица i -го биологического вида использует α_{ij} количество ресурсов j -го вида, тогда должно выполняться следующая система неравенств:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i \leq \rho_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1)$$

При этих условиях динамика развития биологических видов описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) x_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

где $f_i(x_1, \dots, x_n)$ имеет следующие свойства: $f_i(x_1, \dots, x_n)$ по x_j либо невозрастающая функция (если i и j конкурирующие виды), либо неубывающая (если i -й вид для j -го вида является хищником), т.е. $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \leq 0$, либо $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0$.

Будем говорить, что система находится в экологически управляемом состоянии, если выполняются условия:

А) система неравенств (1);

Б) $x_i \geq \bar{x}_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$ — условие необходимого количества численности i -го вида для его сохранения;

С) $f_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, $i = \overline{1, n}$.

В очень многих моделях $f_i(x_1, \dots, x_n)$ берется первое приближение и рассматривается как линейная функция по x_1, \dots, x_n . Одна в реальных моделях следует рассматривать дробно-линейные функции.

Взаимодействие или управление динамикой развития биологических сообществ будем понимать отлов или истребление часть того или иного вида. Пусть $u_i(t)$ ($u_i(t) \geq 0$) $i = \overline{1, n}$ показывает какая часть i -го вида истребляется в момент времени t . Тогда уравнение (2) принимает следующий вид:

$$\dot{x}_i(t) = (f_i(x_1, \dots, x_n) - u_i(t))x_i(t). \quad (3)$$

В этом случае возникают две задачи:

1. Найти такое уравнение, чтобы систему привести к экологически управляемому состоянию.
2. Из этих равновесных состояний найти то, при котором $u_i^* = f_i(x_1, \dots, x_n)$ $i = \overline{1, n}$ — уравнение будет в некотором смысле оптимально.

Ясно, что если $x^*(t) = (x_1^*(t), \dots, x_n^*(t))$ удовлетворяет условию А), Б) и С), то при управлении $u_i^* = f_i(x_1^*, \dots, x_n^*)$ численность биологических видов будет постоянным.

Для различных моделей (хищник-жертва, три биологических вида и т.д.) можно построить управление, приводящее систему в экологически управляемое состояние, а так же построить в определенном смысле оптимальное управление.

Литература

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / Ю.М. Свиричева. — М. : Наука, 1976. — 286 с.

2. Sarah P. Otto, Troy Day. A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution // Princeton University Press.— 2007. — 744 p.

3. Lenhart S., Workman J.T. Optimal Control Applied to Biological Models // New York : Chapman and Hall//CRC. — 2007. — 274 p.

4. Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ — М. : Наука, 1978. — 352 с.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА¹

В.А. Горелов (Москва, НИУ "МЭИ")

gorelov.va@mail.ru

Пусть \mathbb{A} — множество всех алгебраических чисел. При $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $\gamma\vec{\mu} + \beta = (\gamma\mu_1 + \beta, \dots, \gamma\mu_n + \beta)$. Для векторов $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ будем писать $\vec{\mu} \sim \vec{\eta}$, если существует перестановка π чисел $1, \dots, n$ такая, что $\mu_i - \eta_{\pi(i)} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$.

В рамках метода Зигеля-Шидловского (см. [1]) в теории трансцендентных чисел ряд авторов (В.А. Олейников [2], В.Х. Салихов [3] и другие) исследовали вопрос об алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций ${}_0\varphi_3(\vec{\lambda}; (z/3)^3)$, где

$${}_0\varphi_3(\vec{\lambda}; z) = {}_1F_3 \left(\begin{matrix} 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1)_n (\lambda_2)_n (\lambda_3)_n} z^n,$$

$(\lambda)_0 = 1$, $(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)$, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0})^3$, функция ${}_0\varphi_3(\vec{\lambda}; z)$ удовлетворяет уравнению

$$y''' + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{z} y'' + \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 1}{z^2} y' + \left(\frac{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1)}{z^3} - \frac{1}{z^2} \right) y = \frac{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1)}{z^3}.$$

Некоторые результаты о функциях ${}_0\varphi_3(\vec{\lambda}; (z/3)^3)$ являлись случаями более общих теорем. В частности, из [3, теорема 2] следует, что если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha_i/\alpha_j \notin$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проекта государственного задания № FSWF-2026-0010.

© Горелов В.А., 2026

$\mathbb{Q}(\xi)$, $i \neq j$, $\xi = \exp(2\pi i/3)$, то совокупность $3m$ функций ${}_0\varphi_3^{(k)}(\vec{\lambda}; (\alpha_j z/3)^3)$, $k = 0, 1, 2$, $j = 1 \dots, m$ алгебраически независима над $\mathbb{C}(z)$ тогда и только тогда, когда числа $3\lambda_1, 3\lambda_2, 3\lambda_3$ не являются целыми, образующими полную систему вычетов по $\text{mod } 3$.

В настоящее время автором получен более сильный результат.

Теорема. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha_s \neq \alpha_t$, $s \neq t$. Тогда для алгебраической зависимости $3m$ функций ${}_0\varphi_3^{(k)}(\vec{\lambda}; \alpha_j z)$, $k = 0, 1, 2$, $j = 1 \dots, m$ над $\mathbb{C}(z)$ необходимо и достаточно хотя бы одно из следующих двух условий:

1. $\vec{\lambda} \sim (0, 1/3, 2/3)$.
2. $\vec{\lambda} \sim \lambda_i - \vec{\lambda}$ и $\alpha_s = -\alpha_t$ при некоторых $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq s < t \leq m$.

Литература

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа / А.Б. Шидловский. — М. : Наука, 1987. — 448 с.
2. Олейников В.А. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых целых функций / В.А. Олейников // Изв. АН СССР. — 1968. — Т. 32. — С. 63–92.
3. Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости значений одного класса гипергеометрических функций / В.Х. Салихов // Матем. сборник. — 1990. — Т. 181, № 2. — С. 189 – 211.

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ

С. Гоцоев (Владикавказ, СОГУ)

sgocoev@mail.ru

На графе Γ рассматривается оператор Штурма-Лиувилля $L : C(\Gamma) \cap C^2[\Gamma] \rightarrow C[\Gamma]$,

$$Lu = \begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)u, & x \in E(\Gamma), \\ -\sum_{i \in I(x)} p_i(x)u'_{i\nu} + q(x)u, & x \in J(\Gamma), \end{cases}$$

где $p \in C^1[E(\Gamma)]$, $q \in C[\Gamma]$, $p > 0$, $q \geq 0$ на Γ , индекс ν означает, что производная на соответствующем ребре берется по направлению от вершины.

Для оператора L будут рассматриваться две краевые задачи:

$$Lu = f(x), \quad u|_{\partial\Gamma} = 0; \quad (1)$$

$$Lu = f(x), \quad (u'_\nu - \alpha u)|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где $\alpha : \partial\Gamma \rightarrow [0, \infty]$. При этом считаем, что в предельном случае $\alpha = \infty$ соответствующее граничное условие приобретает вид условия Дирихле $u(a) = 0$.

Соответствующие дифференциальные операторы краевых задач и будем обозначать L и L_α .

Лемма 1. Пусть $|\partial\Gamma| \geq 2$. Тогда краевые задачи (1) и (2) однозначно разрешимы для любой правой части $f \in C[\Gamma]$.

Функции Грина $G(x, s)$, $G_\alpha(x, s)$ краевых задач (1,2) существуют и единственны.

Теорема 1. Функция Грина $G_\alpha(x, s)$ краевой задачи (2) положительна на декартовом произведении $\Gamma \cup \{a_0\} \times \Gamma \cup \{a_0\}$.

Теорема 2. Если $\alpha \neq \infty$ на $\partial\Gamma$, то $G_\alpha(x, s) > G(x, s)$ на $\Gamma \times \Gamma$.

Далее на Γ рассмотрим краевые задачи

$$Lu = f(x), \quad (u'_\nu - \alpha_1 u)|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (3)$$

$$Lu = f(x), \quad (u'_\nu - \alpha_2 u)|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 : \partial\Gamma \rightarrow [0, \infty]$.

Обозначим функции Грина краевых задач (3) и (4) $G_{\alpha_1}(x, s)$ и $G_{\alpha_2}(x, s)$ соответственно. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 3. Если $\alpha_1 \geq \alpha_2$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $G_{\alpha_2}(x, s) > G_{\alpha_1}(x, s)$ на $(\Gamma \cup \{a_0\}) \times (\Gamma \cup \{a_0\})$.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

Ю.Э. Даник, М.Г. Дмитриев (Москва, ФИЦ ИУ РАН)
yuliadanik@gmail.com, mdmitriev@mail.ru

В работе на основе формализма подхода D-SDRE (Discreet State-Dependent Riccati Equation) [1-2]. для построения обратных связей в нелинейных дискретных управляемых системах [3-6] и техники построения асимптотических приближений, использующих Паде аппроксимации (ПА) [7] приводится алгоритм построения параметрического семейства регуляторов в дискретных управляемых нелинейных системах при всех значениях параметра на заданном интервале. Сначала делается разбиение параметрического интервала на несколько и вводятся при этом малые параметры вблизи концов введенных подинтервалов, на основе которых строятся асимптотические приближения к решениям соответствующих матричных уравнений Риккати для определения матрицы коэффициентов усиления в законах управления с обратной связью. На основе асимптотических приближений вблизи границ исходного интервала и граничных точек подинтервалов строятся многоточечные матричные аппроксимации Паде.

Пусть уравнения динамики имеют вид

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(x, \varepsilon)x(t) + B(x)u(t), \\ A(x, \varepsilon) &= A_0 + \varepsilon A(x), \quad x(0) = x_0, \\ x(t) \in X \subset R^n, \quad u(t) \in R^r, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \\ \alpha \leq \varepsilon \leq \beta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A_0 \in R^{n \times n}$ – постоянная матрица, $A(x, \varepsilon) \in R^{n \times n}$, $B(x) \in R^{n \times r}$, $X \subset R^n$ – заданное ограниченное замкнутое подмножество пространства состояний, более того, траектории замкнутой системы существуют и единственны в X для всех $t = 0, 1, 2, \dots$. Требуется выбрать управление $u(t)$, так чтобы достигался минимум критерия

$$I(u) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} (x^T Q(x, \varepsilon)x + u^T R_0 u) \rightarrow \min, \quad (2)$$

где $Q(x, \varepsilon) \in R^{n \times n}$, $R_0 \in R^{r \times r} > 0$, $Q(x, \varepsilon) > 0$ и матрицы критерия (2) $Q(x, \varepsilon)$, R_0 подбираются в процессе построения регулятора в виде

$$u(x, \varepsilon) = - [R_0 + B(x)^T K B(x)]^{-1} B(x)^T K A(x, \varepsilon)x(t), \quad (3)$$

так что при каждом $x(t)$ матрица $K(x, \varepsilon)$ является решением алгебраического дискретного матричного уравнения Риккати, с зависящими от состояния коэффициентами, как в подходе D-SDRE [1]

$$A^T(x, \varepsilon)KA(x, \varepsilon) - K - A^T(x, \varepsilon)KB(x)\tilde{R}^{-1}(x)B^T(x)KA(x, \varepsilon) + Q(x, \varepsilon) = 0 \quad (4)$$

где $\tilde{R}(x) = (R_0 + B^T(x)KB(x))$ является обратимой $\forall x \in X$, $\alpha \leq \varepsilon \leq \beta$.

Далее разбивается параметрический интервал на несколько и вводятся малые параметры вблизи концов введенных подинтервалов, на основе которых строятся асимптотические приближения к решениям соответствующих дискретных матричных уравнений Риккати для определения соответствующих матриц коэффициентов усиления в законах управления с обратной связью. На основе асимптотических приближений вблизи границ исходного интервала и граничных точек подинтервалов строятся многоточечные матричные аппроксимации Паде заданного порядка с помощью решения соответствующих матричных уравнений Риккати и Ляпунова и определяются соответствующая матрица коэффициентов усиления в регуляторе (3) и условия, при выполнении которых справедливы утверждения об асимптотической близости строящихся многоточечных Паде регуляторов.

Также приводятся численные эксперименты для нелинейных задач, которые демонстрируют повышение точности при увеличении как числа подинтервалов, так и порядка асимптотических приближений в каждой точке параметрического интервала, что позволяет на основе таких конструкций строить конкретные методы обучения, в результате которых на каждой итерации появляются более лучшие управления, образующие минимизирующие последовательности, вследствие увеличения числа подинтервалов и повышения порядка асимптотических приближений, а также вводя различные способы подкрепления полученных членов минимизирующих последовательностей с помощью соответствующих приемов их улучшения, например, решая вспомогательные задачи оптимизации для дополнительных параметров в каждой итерации изменяя коэффициенты в матрицах критерия (2).

Литература

1. Dutka A.S. Optimized discrete-time state dependent Riccati equation regulator / A.S. Dutka, A.W. Ordys, M.J. Grimble // Proceedings of the American Control Conference. — 2005. — С. 2293–2298.

2. Cimen T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the State-Dependent Riccati Equation (SDRE) method / T. Cimen // Annual Reviews in Control. — 2010. — Т. 34. — С. 32–51.

3. Danik Yu.E. Construction of parametric regulators for nonlinear control systems based on the Padé approximations of the matrix Riccati equation solution / Yu.E. Danik, M.G. Dmitriev // IFAC-PapersOnLine. — 2018. — Т. 51. — С. 815–820.

4. Danik Yu.E. One D-SDRE regulator for weakly nonlinear discrete state dependent coefficients control systems / Yu.E. Danik // The 7th International Conference Control, Decision and Information Technologies (CODIT). — 2020. — С. 616–621.

5. Danik Yu.E. The construction of stabilizing regulators sets for nonlinear control systems with the help of Pade approximations / Yu.E. Danik, M.G. Dmitriev // Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. — Springer, 2021. — Т. 139. — С. 45–62.

6. Danik Yu.E. Symbolic regulator sets for a weakly nonlinear discrete control system with a small step / Yu.E. Danik, M.G. Dmitriev // Mathematics. — 2022. — Т. 10. — С. 487.

7. Baker G. Padé approximations / G. Baker, P.R. Graves-Morris. — Addison-Wesley Publishing, 1981.

ОБ УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С ВЕКТОРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

М.Н. Демченко (Санкт-Петербург, ПОМИ)
demchenko@pdmi.ras.ru

Доклад посвящен ультрагиперболическому уравнению, возмущенному векторным потенциалом. Уравнения ультрагиперболического типа не имеют столь широкого применения, как классические (эллиптические, параболические, гиперболические) уравнения. Тем не менее они возникают в некоторых областях и стали предметом ряда исследований (см., например, [1–5]). Одной из таких областей является теория рассеяния для оператора Шрёдингера в \mathbb{R}^d :

$$H = H_0 + q(x), \quad H_0 = -\Delta.$$

Предложенный Л. Д. Фаддеевым подход к решению соответствующей обратной задачи основан на сплетающих операторах, удовлетворяющих равенству $HU = UH_0$. Ядро Шварца $\Omega(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$,

сплетающего оператора является решением следующего ультрагиперболического уравнения с потенциалом:

$$(\Delta_y - \Delta_x + q(x))\Omega(x, y) = 0. \quad (1)$$

Данное исследование посвящено поиску других возмущенных ультрагиперболических уравнений, которые могут иметь приложения в физике. Одно из таких уравнений может быть получено следующей модификацией уравнения (1). Сначала заметим, что в переменных $u = (x + y)/2$, $v = (x - y)/2$, последнее имеет вид

$$\left(\sum_k \partial_{u_k v_k}^2 - q(u + v) \right) \Omega(u, v) = 0.$$

Далее, мы предположим, что переменные u, v являются элементами пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,d}$ (вместо евклидова пространства):

$$u = (u^0, u^1, \dots, u^d), \quad v = (v^0, v^1, \dots, v^d),$$

и заменим старший член на сумму $\partial_{u_\alpha} \partial_{v^\alpha}$. Здесь мы используем стандартные ковариантные обозначения:

$$\partial_{u^\alpha} = (\partial_{u^0}, \partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^d}), \quad \partial_{u_\alpha} = (\partial_{u^0}, -\partial_{u^1}, \dots, -\partial_{u^d}),$$

(аналогично для ∂_{v^α} , ∂_{v_α}), которые также подразумевают суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам. Наконец, от скалярного потенциала q мы перейдем к векторному потенциалу $A^\alpha(u)$ — функции со значениями в $\mathbb{R}^{1,d}$, которая в случае $d = 3$ может иметь смысл электромагнитного потенциала в пространстве-времени. Мы учтем векторный потенциал аналогично тому, как это делается при выводе уравнений Клейна-Гордона-Фока и уравнении Дирака — заменим в старшем члене производную ∂_{u_α} на связность специального вида (по переменной u):

$$(\partial_{u_\alpha} + iA^\alpha(u))\partial_{v^\alpha}\Omega(u, v) = 0. \quad (2)$$

Заметим, что в обоих уравнениях (1) и (2) коэффициенты зависят от одной из двух переменных.

В докладе будут обсуждаться некоторые свойства уравнения (2), которое представляет пока только математический интерес. Однако, его решение $\Omega(u, v)$ может быть естественным образом (с математической точки зрения) связано с операторами, действующими в пространстве состояний массивного скалярного поля.

Литература

1. Благовещенский А.С. О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения / А.С. Благовещенский // Матем. сб. — 1964. — Т. 33:105. — № 1. — С. 137–168.
2. Благовещенский А.С. О задаче для ультрагиперболического уравнения с данными на характеристической плоскости / А.С. Благовещенский // Вестник ЛГУ. — 1965. — Т. 13. — С. 13–19.
3. Ляхов Л.Н. Об одной задаче И. А. Киприянова для сингулярно-ультрагиперболического уравнения / Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50. — № 4. — С. 516–528.
4. Ortner N. Fourier transformation of $O(p, q)$ -invariant distributions. Fundamental solutions of ultra-hyperbolic operators / N. Ortner, P. Wagner // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 450. — P. 262–292.
5. Демченко М.Н. Об одном представлении решения характеристической задачи для ультрагиперболического уравнения / М.Н. Демченко // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2025. — Т. 541. — С. 76–88.

МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ АРГУМЕНТАМИ¹

А.Л. Джабраилов (Грозный, ЧГУ им. А.А. Кадырова)
ahmed_0065@mail.ru

Изучается система линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\sum_{j=1}^l \sum_{\mu=0}^m F_{ij\mu 0}(x) y_j^{(\mu)}(x) + \sum_{j=1}^l \sum_{\mu=0}^n \sum_{v=1}^N \Phi_{ij\mu v 0}(x) y_j^{(\mu)}(x - \varepsilon_v) = W_{i0}(x), \quad (1)$$

с переменными коэффициентами $F_{ij\mu 0}(x)$, $\Phi_{ij\mu v 0}(x)$, $W_{i0}(x)$ из класса k раз дифференцируемых функций, $i = \overline{1, l}$. Для $k = 0$ будем считать, что они непрерывны при $x \geq 0$. Здесь m и n — неотрицательные, а l и N — положительные целые числа, величины ε_v удовлетворяют неравенствам: $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_n < \infty$.

¹ Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки (FEGS-2026-0004).
© Джабраилов А.Л., 2026

Дифференцируем обе части уравнения (1) по x и в полученное выражение вносим значения $y_j^{k_i}(x)$, $j = \overline{1, l}$, из (1), предварительно разрешив систему (1) относительно $y_j^{k_i}(x)$, $i = \overline{1, e}$, тогда имеем:

$$\sum_{j=1}^l \sum_{\mu=0}^m F_{ij\mu 1}(x) y_j^{(\mu)}(x) + \sum_{j=1}^l \sum_{\mu=0}^{n+1} \sum_{v=1}^N \Phi_{ij\mu v 1}(x) y_j^{(\mu)}(x - \varepsilon_v) = W_{i1}(x). \quad (2)$$

После преобразований (1) и (2), где $i = \overline{1, l}$, $\alpha = 0, 1, 2, \dots, k$:

$$\sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^{m+1} F_{ij\mu\alpha}(x) y_j^{(\mu)}(x) + \sum_{j=1}^l \sum_{\mu=1}^{n+\alpha} \sum_{v=1}^N \Phi_{ij\mu v\alpha}(x) y_j^{(\mu)}(x - \varepsilon_v) = W_{i\alpha}(x). \quad (3)$$

Из (3) при $\alpha = 0$ получается система (1), при $\alpha = 1$ — система (2) и т.д. Для этих систем, если нет дополнительных условий, единственность решения не имеет места. Поэтому решение системы (1) нельзя получить, вообще говоря, как решение какой-либо из систем (3), $\alpha = \overline{1, k}$.

Для систем (3), $\alpha = 0, 1, 2, \dots, k$, начальные условия можно задавать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i^{(m+p-\alpha)}(x) = \varphi_i^{(p-\alpha)}, \quad x \in [-\varepsilon_N, 0], \quad p = 0, 1, 2, \dots, k, \\ \alpha = 0, 1, 2, \dots, p, \\ y_i^{(\mu)}(x_0) = y_{i0}^{(\mu)}, \quad x_0 \in [-\varepsilon_N, 0], \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad i = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (4)$$

где функции $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, e}$, непрерывно дифференцируемы до k -го порядка включительно на $[-\varepsilon_{w,0}]$, а $y_{i0}^{(\mu)}$ — некоторые заданные числа.

Теорема Пусть $m \geq n$ и $i = \overline{1, l}$. Пусть для любого фиксированного числа $\alpha = 0, 1, \dots, k$, функции $F_{ij\mu 0}(x)$, $\Phi_{ij\mu v 0}(x)$, $W_{i0}(x)$ k раз дифференцируемы и таковы, что $F_{ij\mu\alpha}(x)$, $\Phi_{ij\mu v\alpha}(x)$, $W_{i\alpha}(x)$, $\alpha = \overline{1, k}$ непрерывны для $x \geq 0$, тогда задача (3), (4) имеет единственное решение $y_i(x)$ такое, что функции $y_i^{(m+\alpha)}(x)$ непрерывны при $x \geq -\varepsilon_N$. Для $\mu = 0, 1, 2, \dots, m+\alpha-1$ функции $y_i^{(\mu)}(x)$ непрерыв-

ны при $x \geq -\varepsilon_N$, при $-\varepsilon_N \leq x < 0$ они удовлетворяют равенствам

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i^{(m+p-\alpha)}(x) = \varphi_i^{(p-\alpha)}(x), \quad x \in [-\varepsilon_N, 0), \quad p = 0, 1, 2, \dots, k, \\ \alpha = 0, 1, 2, \dots, p, \\ y_j^{(\mu)}(x) = \sum_{q=\mu}^{m-1} y_j^{(q)}(x_0) \frac{(x-x_0)^{q-\mu}}{(q-\mu)!} + \int_{x_0}^x \frac{(x-\tau)^{m-1-\mu}}{(m-1-\mu)!} \varphi_i(\tau) d\tau, \end{array} \right. \quad (5)$$

а при $x \geq 0$ является решением системы интегро-дифференциальных уравнений

$$y_j^{(\mu)}(x) = \sum_p \frac{\mu_p}{D_\alpha^{(u_p)}(z_p)} \left[\frac{\partial^{\mu_{p-1}}}{\partial z^{\mu_{p-1}}} \{N_{i\alpha}(z, x) z^\mu\} \right]_{z=z_p}, \quad i = \overline{1, l}, \quad (6)$$

причем суммирование производится по всем корням z_p уравнения

$$D_\alpha(z) = |D_{ij\alpha}(z)| = 0, \quad (7)$$

μ_p — кратность корня z_p уравнения (7).

При выполнении условий теоремы система интегро-дифференциальных уравнений (6) также имеет единственное решение $y_i(x)$, удовлетворяющее начальным условиям (4), (5), что следует из теории интегральных уравнений типа Вольтерра.

Литература

1. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе. — Тбилиси : Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. — 352 с.
2. Исраилов С.В. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / С.В. Исраилов, С.С. Ющев. — Нальчик : Изд-во «Эльфа», 2004. — 445 с.

О КРИТИЧНОСТИ МЫШЛЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

И.В. Добрынина (Москва, МТУСИ)

ivdobrynina@rambler.ru

В современном мире трудно обойтись без критического мышления [1]. Огромный поток информации требует анализа, переработки, аргументированности, достоверности, умения делать правильные выводы и принимать решения. Эта же проблема присуща образованию, особенно студентов технических вузов [2], связанных с информационными технологиями. Развивать критическое мышление крайне важно в контексте искусственного интеллекта, захватившего в последнее время информационное пространство [3].

Рассмотрим проблему развития критического мышления на примере математического образования студентов Московского технического университета связи и информатики. Если говорить о бакалаврах, то математические дисциплины, как правило, изучаются на 1-2 курсах, исключение составляют лишь функциональный анализ и исследование операций. Математические дисциплины включают в себя линейную алгебру и аналитическую геометрию, математический анализ и дискретную математику. На факультете цифровой экономики и массовых коммуникаций читается общий курс высшей математики, но его направления подготовки имеют вторичную техническую направленность.

Студенты как будущие специалисты в IT-сфере должны глубоко мыслить, обладать аналитическими, пространственными, логическими способностями, анализировать и синтезировать учебный и профессиональный материал, находить эффективные решения и уменьшать риски. При решении математических задач обучаемые иногда прибегают к нейросетям и искусственному интеллекту, часть заданий которыми выполнется с ошибками или неполно. Студенты, проявив самостоятельность, должны уметь критически оценить предлагаемые методы, подходы, выкладки и выводы, все проверить и сделать правильные заключения. Однако преподавателям стоит быть внимательными к процессу обучения, особенно касаясь объективности оценки знаний [4].

Для развития новейших современных технологий требуется креативность, инновационность и нестандартность. Выработка таких идей требует критического осмысления. Умение решать такого рода задачи хорошо проявляется в математических олимпиадах и конкурсах. Кроме того, с этим тесно связаны научные исследования. Выполнение курсовых, выпускных квалификационных работ, написание диссертаций требуют научной новизны, основательной переработки информации, умения выделять существенное, обосновывать, вносить и доказывать новое. Доклады на конференциях, публика-

ции статей, участие в научных семинарах и кружках продвигают и стимулируют такую деятельность.

В принятии эффективных решений, кроме сказанного, требуется уметь всесторонне рассматривать все возможные аспекты, риски, владеть оптимизацией.

В работе [4] говорилось о семестровых индивидуальных заданиях, выдаваемых студентам преподавателями кафедры математического анализа. В отличие от заданий ЕГЭ, где много шаблонности, они предполагают элементы творчества, а в сочетании с защитой, вносят большой вклад в развитие критического мышления.

Кроме того, эмоциональный интеллект, коммуникативные навыки, умение отстаивать свою точку зрения, требуют критичности и успешно используются в учебном процессе.

Проводимое в работе исследование является продолжением анализа математического образования, излагаемого в [3], [4].

Литература

1. Плотникова Н.Ф. Критическое мышление и его формирование в высшем учебном заведении / Н. Ф.Плотникова // Образовательные технологии и общество. — 2009. — Т. 12. — №. 1. — С. 396-400.

2. Мухамедова Ш.Ф. Методические основы исследования проблемы математического образования студентов технических направлений вузов / Ш.Ф. Мухамедова // Ученые записки. — 2022. — № 1. — С. 196 – 205.

3. Манохин Е.В. К использованию искусственного интеллекта в образовании / Е.В. Манохин, И.В. Добрынина // Педагогическая информатика. — 2024. — № 4. — С. 172-180.

4. Добрынина И.В. О проблеме оценки качества математических знаний студентов / И.В. Добрынина // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXVI. Материалы Международной Воронежской весенней математической школы, посвященной памяти С.М. Никольского. — Воронеж, 2025. — С. 124-125.

УСРЕДНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КОРРЕКТОРОМ¹

М.А. Дородный (Санкт-Петербург, СПбГУ)

mdorodni@yandex.ru

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-343 от 29.04.2025) и программы социальных инвестиций «Родные города» ПАО «Газпром нефть».

© Дородный М.А., 2026

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается эллиптический дифференциальный оператор $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$, $\varepsilon > 0$. Здесь $g(\mathbf{x})$ — \mathbb{Z}^d -периодическая положительно определённая и ограниченная $(d \times d)$ -матрица-функция с вещественными элементами. Мы изучаем поведение решений задачи Коши $u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \rightarrow 0$, для гиперболического уравнения

$$\begin{cases} \partial_\tau^2 u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = -(A_\varepsilon u_\varepsilon)(\mathbf{x}, \tau), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1)$$

Аппроксимации для решения задачи (1) в старшем порядке были найдены в [1,2]. Введём эффективный оператор $A_0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ и соответствующую эффективную задачу

$$\begin{cases} \partial_\tau^2 u_0(\mathbf{x}, \tau) = -(A_0 u_0)(\mathbf{x}, \tau), \quad u_0(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau u_0(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Здесь g^0 — положительная эффективная матрица с постоянными коэффициентами. Справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(\cdot, \tau) - u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon (\|\varphi\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)} + \|\psi\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)}).$$

Доклад посвящён нахождению приближения по $L_2(\mathbb{R}^d)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ при учёте корректоров. В [3] было установлено, что получить такое приближение в терминах пороговых характеристик на краю спектра оператора A_1 возможно лишь для задачи Коши с начальными данными специального вида:

$$\begin{cases} \partial_\tau^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = -(A_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, \tau), \quad \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \tilde{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}), \end{cases}$$

где $\tilde{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \Psi_j(\mathbf{x}/\varepsilon) \partial_j \varphi(\mathbf{x})$; Ψ_j — слабое \mathbb{Z}^d -периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla \Psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_{(0,1)^d} \Psi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad j = 1, \dots, d;$$

а $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^d$ — стандартные орты в \mathbb{R}^d . Был получен следующий результат:

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - u_0(\cdot, \tau) - \varepsilon \sum_{j=1}^d \Psi_j(\cdot/\varepsilon) \partial_j u_0(\cdot, \tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C(1 + |\tau|) \varepsilon^2 (\|\varphi\|_{H^3(\mathbb{R}^d)} + \|\psi\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon \sum_{j=1}^d \Psi_j(\cdot/\varepsilon) \partial_j u_0(\cdot, \tau)$ — корректор.

В свете описанного результата возникает вопрос: можно ли найти приближение по $L_2(\mathbb{R}^d)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ для решения задачи

$$\begin{cases} \partial_\tau^2 \check{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = -(A_\varepsilon \check{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, \tau), \\ \check{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \varepsilon \sum_{j=1}^d \Psi_j(\mathbf{x}/\varepsilon) \partial_j \varphi(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau \check{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В работе [4] этот вопрос был изучен в одномерном случае ($d = 1$): для решения задачи (3) найдено эффективное приближение $\check{u}_\varepsilon^{\text{eff}}$:

$$\|\check{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \check{u}_\varepsilon^{\text{eff}}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C(1 + |\tau|)\varepsilon^2 \|\varphi\|_{H^4(\mathbb{R})}.$$

При этом вклад в эффективное приближение дают все края «периодических» лагун в спектре оператора A_1 .

Этот результат вместе с (2) позволяет получить приближение по $L_2(\mathbb{R})$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ при учёте корректора для решения исходной задачи (1) в одномерном случае.

Литература

1. Бирман М.Ш. Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений / М.Ш. Бирман, Т.А. Сулина // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20, № 6. — С. 30–107.
2. Дородный М.А. Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в \mathbb{R}^d / М.А. Дородный, Т.А. Сулина // Алгебра и анализ. — 2020. — Т. 32, № 4. — С. 3–136.
3. Дородный М.А. Теоретико-операторный подход к усреднению гиперболических уравнений: операторные оценки при учёте корректоров / М.А. Дородный, Т.А. Сулина // Алгебра и анализ. — 2025. — Т. 37, № 5. — С. 1–178.
4. Дородный М.А. Усреднение одномерных гиперболических уравнений с корректором / М.А. Дородный // Мат. сборник. — 2026. — принято к печати.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРОГО СЕМЕЙСТВА ЗАДАЧ С ИНВОЛЮЦИЕЙ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. К. Доронин (Москва, МГУ)

doronin.alex001@gmail.com

Рассматривается спектральная задача на интервале $(-1, 1)$:

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha u''(-x) = \lambda u(x), & -1 < x < 1, \\ u(-1) = 0, & u(1) = \beta u(0), \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha \in (-1, 1)$, $\beta \in (-2, 2)$, $u \in C^2(-1, 1) \cap C[-1, 1]$. Оператор L определяется выражением $Lu = -u''(x) + \alpha u''(-x)$, содержащим инволюцию $\nu(x) = -x$ в главной части. Граничные условия являются нелокальными за счёт значения решения во внутренней точке $x = 0$.

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x) = A \sin(\mu x) + B \cos(\kappa \mu x), \quad (2)$$

где $\mu = \sqrt{\lambda/(1+\alpha)}$, $\kappa = \sqrt{(1+\alpha)/(1-\alpha)}$.

Подстановка (2) в граничные условия приводит к характеристическому уравнению

$$\sin(\mu)(2 \cos(\kappa \mu) - \beta) = 0. \quad (3)$$

Из (3) получаются три семейства собственных значений: $\mu_k^{(1)} = \pi k$ ($k \in \mathbb{N}$) с собственными функциями $u_k^{(1)}(x) = \sin(\pi k x)$; а также $\kappa \mu_k^{(2)} = \arccos(\beta/2) + 2\pi k$ и $\kappa \mu_k^{(3)} = -\arccos(\beta/2) + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{N}$) с собственными функциями

$$u_k^{(j)}(x) = \sin(\mu_k^{(j)} x) + \frac{2}{\beta} \sin(\mu_k^{(j)}) \cos(\kappa \mu_k^{(j)} x), \quad j = 2, 3. \quad (4)$$

Задача (1) не является самосопряжённой, поэтому для построения спектральных разложений требуется сопряжённая задача. Она строится через условия разрыва функции v и её производной v' в точке $x = 0$; характеристическое уравнение сопряжённой задачи совпадает с (3).

Доказана полнота и минимальность системы собственных функций задачи (1) в $L_2(-1, 1)$.

Назовём условием (*) требование $\mu_n^{(1)} \neq \mu_k^{(2,3)}$ для всех $n, k \in \mathbb{N}$, т. е. $\pi n \neq \frac{1}{\kappa} (\pm \arccos(\beta/2) + 2\pi k)$.

Теорема 1. При выполнении условия (*) на параметры α, β система собственных функций задачи (1) образует базис Рисса в $L_2(-1, 1)$.

Доказательство основано на теореме Н. К. Бари: из минимальности и полноты системы собственных функций задачи (1) и бесследности систем собственных функций прямой и сопряжённой задач следует свойство базисности Рисса.

Матричный подход, сводящий задачу (1) к системе на $[0, 1]$ с помощью замены $V_1(x) = u(x)$, $V_2(x) = u(-x)$, позволяет расщепить уравнение на два независимых: диагонализация матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$ приводит к чётно-нечётному разложению, что открывает перспективу обобщения на оператор вида $-\beta u''(x) + \alpha u''(-x) = \lambda u(x)$ с двумя параметрами при производных.

Литература

1. Крицков Л. В., Сарсенби А. М. Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией / Л. В. Крицков, А. М. Сарсенби // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 990–996.
2. Садыбеков М. А., Сарсенби А. М. Критерий базисности системы собственных функций оператора кратного дифференцирования с инволюцией / М. А. Садыбеков, А. М. Сарсенби // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1126–1132.
3. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка / В. А. Ильин // Дифференц. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 12. — С. 2059–2071.
4. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Теорема Штурма–Лиувилля для функционально-дифференциального уравнения с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 9, вып. 4. — С. 3–10.
5. Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве / Н. К. Бари // Учёные записки Моск. гос. ун-та. — 1951. — Вып. 148. — С. 69–107.

О РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВ НА ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА¹

Ю.А. Дубинский, П.В. Зубков (Москва, НИУ «МЭИ»)

DubinskiiJuA@mpei.ru, ZubkovPV@mpei.ru

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта государственного задания № FSWF-2026-0010.

© Дубинский Ю.А., Зубков П.В., 2026

Пусть $\vec{V}_2^1(G) \subset \vec{W}_2^1(G)$ — замкнутое подпространство. Рассмотрим на $\vec{V}_2^1(G)$ градиентную билинейную форму

$$(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})_0 = \sum_{i=1}^3 \int_G (\nabla u_i, \nabla v_i) dx, \quad (1)$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \vec{V}_2^1(G)$ и $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \vec{V}_2^1(G)$, и поставим следующую задачу: по заданному функционалу $\vec{h} \in \left(\vec{W}_2^1(G)\right)^*$ найти функцию $\vec{u} \in \vec{V}_2^1(G)$, такую, чтобы форма $(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})_0$ совпала с сужением функционала \vec{h} на подпространство $\vec{V}_2^1(G)$.

Иными словами ищется функция $\vec{u} \in \vec{V}_2^1(G)$, такая, чтобы для любой пробной функции $\vec{v} \in \vec{V}_2^1(G)$

$$(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v})_0 = \left(\vec{h}, \vec{v}\right)_G, \quad (2)$$

где $\left(\vec{h}, \vec{v}\right)_G$ — значение функционала $\vec{h} \in \left(\vec{W}_2^1(G)\right)^*$ на функции $\vec{v} \in \vec{V}_2^1(G)$.

Определение 1. Функцию $\vec{u} \in \vec{V}_2^1(G)$ будем в дальнейшем называть решением интегрального тождества (2) на подпространстве $\vec{V}_2^1(G)$.

Определение 2. Поставленная задача о представлении билинейной формы (1) в виде (2) называется корректной, если для любого функционала $\vec{h} \in \left(\vec{W}_2^1(G)\right)^*$ интегральное тождество (2) имеет единственное решение $\vec{u} \in \vec{V}_2^1(G)$ и при этом

$$\|\vec{u}\|_{\vec{L}_2(G)} + \|\nabla \vec{u}\|_{\vec{L}_2(G)} \leq M \left\| \vec{h} \right\|_{\left(\vec{W}_2^1(G)\right)^*}, \quad (3)$$

где $M > 0$ — постоянная, не зависящая от \vec{u} .

Укажем для каких подпространств $\vec{V}_2^1(G) \subset \vec{W}_2^1(G)$ поставленная задача корректна.

Имеет место следующая

Теорема. Задача (2) корректна в том и только в том случае, если на подпространстве $\vec{V}_2^1(G)$ индуцированная норма

$$\|\vec{u}\|_1 = \|\vec{u}\|_0 + \|\nabla \vec{u}\|_0$$

эквивалентна градиентной норме

$$\|\vec{u}\|'_1 = \|\nabla \vec{u}\|_0$$

(здесь $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{\bar{L}_2(G)}$).

Литература

1. Дубинский Ю.А. О сингулярном следе 3D–векторных полей и соответствующих краевых задачах // Пробл. мат. анализ. — 2023. — Т. 125. — С. 59–69.
2. Дубинский Ю.А. Неравенства Пуанкаре для 3D–векторных полей и задача Неймана / Ю.А. Дубинский, П.В. Зубков // Пробл. мат. анализ. — 2024. — Т. 127. — С. 91–107.

ГЛАДКОСТЬ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

А.Ю. Егорова¹, А.Н. Коненков² (Рязань,

¹РГРТУ имени В. Ф. Уткина, ²РГУ имени С. А. Есенина)

ayu_egorova@mail.ru, an.konenkov@gmail.com

В анизотропных пространствах Гёльдера $H^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$, гладкость потенциала простого слоя и его пространственной производной первого порядка для параболических систем второго порядка с гёльдеровскими коэффициентами установлена в [1] в плоских полуограниченных областях с боковой границей из класса Жевре. При тех же предположениях относительно гладкости боковой границы области и коэффициентов системы в [2] показано, что потенциал простого слоя с плотностью из класса $C_{\circ}[0, T]$ принадлежит пространству $C_{\circ}^{1,1/2}(\bar{\Omega})$ функций, непрерывных и имеющих непрерывную пространственную производную первого порядка и порядка $1/2$ по t , и обращающихся в нуль при $t = 0$.

Мы исследуем свойства потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах Зигмунда $H_l(\bar{\Omega})$, $l \geq 3$, которые являются аналогом пространств Гёльдера $H^{l, \alpha}(\bar{\Omega})$ для целого показателя гладкости ($\alpha = 0$). Полученные результаты используются для исследования свойств решений краевых задач в пространствах Зигмунда. В частности, выписываются явно логарифмические особенности производных решений первой и второй краевых задач вблизи боковой границы области.

В полуполосе $D_+ = D \cap \{x > 0\}$, где $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, с «боковой» границей $\Sigma_0 = \bar{D} \cap \{x = 0\}$ рассмотрим параболическую

по Петровскому систему второго порядка

$$\partial_t u - A \partial_x^2 u = 0, \quad (1)$$

где $u = (u_1, \dots, u_p)^T$, $p \in \mathbb{N}$, $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^p$ — матрица размера $p \times p$ с вещественными элементами.

Векторный потенциал простого слоя с плотностью φ имеет вид:

$$U\varphi(x, t) = \int_0^t Z(x, t - \tau)\varphi(\tau)d\tau$$

где $Z(x - y, t - \tau)$ — фундаментальная матрица решений системы (1).

Определение анизотропных пространств Зигмунда $H_l(\bar{\Omega})$, $l \in \mathbb{N}$, приведено в [3]. Весовые пространства Зигмунда $H_m^{(-l)}(\bar{\Omega})$ определены в [4].

Теорема. Для $m, l \in \mathbb{N}$ и $m > l + 1$ отображение $U : \varphi \rightarrow U\varphi$ является ограниченным оператором из пространства $H_l(\Sigma_0)$ в $H_m^{(-l-1)}(D_+)$ и из $H_l(\Sigma_0)$ в $H_{l+1}(\bar{D}_+)$.

Литература

1. Тверитинов В.А. Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка. — М. : Деп. в ВИНТИ 30.09.88 №6850-В88, 1988.
2. Бадерко Е.А. Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 2. — С. 198–208.
3. Конёнков А.Н. Задача Коши для параболических уравнений в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т.42, №6. — С. 867–873.
4. Егорова А.Ю. Модельная первая краевая задача для параболической системы в пространствах Зигмунда / А.Ю. Егорова, А.Н. Коненков // Дифференциальные уравнения. — 2025. — Т. 61, № 5. — С. 606–617.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ И СЛУЧАЙНЫМИ КОНЦЕНТРИРОВАННЫМИ СКАЧКАМИ ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

Т.В. Завьялова (Москва, НИТУ «МИСИС»)

tzava@yandex.ru

В работе рассматривается линейная система со случайной структурой, параметры которой подвержены воздействию марковской цепи. Предполагается, что в случайные моменты времени марковская цепь изменяется скачкообразно. В момент перехода системы из одного структурного состояния в другое, скачкообразно изменяется также фазовый вектор системы. Условие скачка является линейным и зависит от случайной нормированной величины. В ранних работах (1), (2) случайные скачки происходили в любой случайный момент времени на некотором конечном промежутке времени. В тоже время, представляется естественной ситуация, в которой скачки начинают происходить с частотой в короткий промежуток времени. То есть за конечный промежуток времени происходит бесконечное число скачков. Примерами систем с частыми импульсными переходами могут быть конструкции с возрастающими вибрациями на конечном промежутке времени, каскадные переключения беспилотных летательных аппаратов во внештатных ситуациях.

Показано, что при определенных ограничениях на параметры скачка система с наличием точки концентрации скачков асимптотически устойчива. Найдены ограничения на значения параметров скачка, при которых система асимптотически устойчива.

Рассматривается линейная система со случайной структурой

$$dx(t) = A(t, y(t), x(t)) dt + \sum_{\nu=1}^l \sigma_{\nu}(t, y(t)) x dw_{\nu}, \quad (1)$$

с заданными начальными условиями $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m$,

$$y(0) = y \in Y.$$

В уравнении (1) $x \in \mathbb{R}^n$ — n -мерный вектор фазовых координат системы; время t изменяется в области $I = [0, T]$; матрицы-функции $A(t, y(t), x(t))$, $\sigma_{\nu}(t, y(t))$ — заданы.

Вектор-функция $y(t)$ является простой марковской цепью, при каждом t принимающей значения из множества $F = \{y_1, \dots, y_k\}$. Простая марковская цепь допускает разложение

$$\begin{aligned} P\{y(t) = y_j \mid y(s) = y_i \neq y_j\} &= q_{ij}(t-s) + o(t-s), \\ P\{y(t) = y_i, s \leq \tau \leq t \mid y(s) = y_i\} &= 1 - q_i(t-s) + o(t-s), \end{aligned} \quad (2)$$

где q_{ij} — известные переходные вероятности из i -го состояния в j -е, $o(t-s)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $(t-s)$, $w(t) = \{w_1(t), \dots, w_m(t)\}$ — m -векторный стандартный винеровский процесс.

Предполагается, что в случайный момент $t_k \in I$ происходит скачкообразное изменение структурного состояния системы. Тогда фазовый вектор изменяется согласно соотношению:

$$x(t_k + 0) = K_{i_k j_k} x(t_k - 0) + \sum_{s=1}^N \xi_s^{(k)} Q_s x(t_k - 0), \quad (3)$$

где $y(t_k - 0) = y_{i_k}$, $y(t_k + 0) = y_{j_k} \neq y_{i_k}$, $K_{i_k j_k}$ — $n \times n$ -матрицы, $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$, описывающие детерминированную компоненту скачка; Q_s — постоянные $n \times n$ -матрицы, $s = 1, \dots, N$, определяющие случайную компоненту скачка; $\xi_s^{(k)}$, $s = 1, \dots, N$, $k \geq 0$ — нормированные случайные величины: $M \xi_s^{(k)} = 0$, $M(\xi_s^{(k)})^2 = 1$. Для каждого фиксированного k величины $\{\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_N^{(k)}\}$ — независимы.

Предполагается, что точка критической концентрации скачков определена условием $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t^* \in [0, T]$.

С помощью метода функций Ляпунова найдены условия для параметров скачка, при которых система (1)–(3) с точкой концентрации скачков асимптотически устойчива. Рассмотрен демонстрационный моделирующий пример такой системы и получены оценки параметров случайных скачков, при которых система устойчива.

Литература

1. Завьялова Т.В. Об устойчивости движения стохастических систем со случайным условием скачка фазовой траектории / Т.В. Завьялова, И.Я. Кац, Г.А. Тимофеева // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 7. — С. 33–43.
2. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И.Я. Кац. — Екатеринбург: Изд. УрГУПС, 1998. — 222 с.
3. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М.: Мир; АСТ, 2003. — 408 с.

РАСЧЕТ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СХЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н.С. Задорожная (Ростов-на-Дону, РГУПС)

simon@sfedu.ru

В настоящее время для решения задач математической физики успешно применяются различные варианты метода конечных элементов, уже получившие широкое распространение в задачах механики и других областях [1]. Искомое решение, как и в прямых вариационных методах Рунге, Галеркина и др., ищется в виде суперпозиции координатных (базисных) функций. Однако при этом основное внимание уделяется специальному выбору координатных функций и последовательности конечномерных подпространств $v \in W$, где W - пространство, в котором ищется минимум некоторого функционала.

Для построение системы координатных функций необходимо представить область, в которой ищется решение, в виде объединения непересекающихся сеточных элементов.

В одномерном случае область разбивается на сегменты, в двумерном – на прямоугольники и т.д.

На первом этапе построения разностных схем область определения представляется в виде объединения элементов, в которой искомая функция аппроксимируется, как правило, некоторым кусочным полиномом. Коэффициенты полинома подбираются так, чтобы обеспечить однозначное определение полинома, а также требуемую гладкость решения. На каждом элементе выделяются точки (узлы), в которых фиксируются один или несколько параметров: значение функции и значения некоторых ее производных.

На втором этапе формулируется, а затем решается вариационная задача поиска коэффициентов полинома. После разделения области на элементы задача сводится с помощью вариационного подхода к системе линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равным числу точек интерполяции. Так, в схеме с треугольными элементами число ненулевых компонентов равно семи, а с прямоугольными – девяти.

Литература

1. Самарский А.А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А.А. Самарский, В.Б. Андреев — М. : Наука, 1976. — 352 с.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Н.В. Зайцева, А.Б. Муравник (Москва, МГУ, РУДН)

n.v.zaiceva@yandex.ru, amuravnik@yandex.ru

В области $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ рассмотрена следующая задача:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) - a u_x(x - h, y) - b u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D;$$

$$|u(x, y)| < +\infty, \quad (x, y) \in D;$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $a > 0$, $b > 0$, $h \neq 0$ — заданные действительные числа, $u_0(x)$ — непрерывная и ограниченная функция.

С помощью интегральных преобразований решение задачи построено в явном виде. Получены достаточные условия на коэффициенты и сдвиг уравнения, гарантирующие существование решения.

Краевая задача для линейного эллиптического уравнения, содержащего оператор сдвига в младшей производной, исследуется впервые.

О ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ¹

Д.А. Загора (Симферополь, КФУ им. В.И. Вернадского)
dmitry.zkr@gmail.com

Исследуется неполное интегро-дифференциальное операторное уравнение второго порядка в гильбертовом пространстве. Ядро разностного типа интегрального возмущения представляет собой голоморфную полугруппу, окаймлённую неограниченными операторами. Доказываются асимптотические формулы для решений в случае, когда правая часть близка к почти периодической функции.

Пусть H , H_0 — комплексные гильбертовы пространства. Пусть A , G , C — плотно определённые замкнутые операторы:

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H, \quad G : \mathcal{D}(G) \subset H_0 \longrightarrow H_0, \quad C : \mathcal{D}(C) \subset H \longrightarrow H_0,$$

причём A , G — самосопряжённые положительно определённые операторы. Будем считать, что введённые операторы удовлетворяют следующей гипотезе:

1') Оператор-функция $C^* \exp(-tG)CA^{-1}$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

¹ Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2026-1313.

© Загора Д.А., 2026

Отсюда, из неравенства Гайнца и полярного разложения замкнутого оператора следует, в частности, что $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(C)$. Обозначим через $\omega_G := \inf\{\lambda \in \sigma(G)\}$ ($\sigma(G)$ — спектр оператора G) нижнюю грань оператора G и предположим, что выполнены следующие гипотезы:

2') Существует $a_1 \in (0, 1)$ такое, что

$$\omega_G^{-1} \|Cu\|_{H_0}^2 \leq a_1 \|A^{1/2}u\|_H^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^{1/2});$$

и 3') Существенный спектр $\sigma_{ess}(A)$ оператора A не более чем счётен

$$\{0 \neq u \in \mathcal{D}(A) : \exists \lambda > 0 : Au = \lambda u\} \cap \text{Ker } C = \emptyset.$$

По операторам A, G, C с учётом гипотез 1'), 2') построим операторный пучок (оператор-функцию) $M(\cdot)$ следующим образом:

$$M(\lambda) := I + \lambda^2 A^{-1} - (CA^{-1/2})^* (G - \lambda I)^{-1} (CA^{-1/2}).$$

В гильбертовом пространстве H рассмотрим задачу Коши для неполного интегро-дифференциального операторного уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= -Au + \int_0^t C^* \exp(-G(t-s))Cu(s) ds + f(t), \\ u(0) &= u^0, \quad u'(0) = u^1. \end{aligned} \quad (1)$$

Определение. Решением задачи Коши (1) назовём функцию $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$ такую, что $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $u'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ при $t \geq 0$, $Au, A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$, выполнены начальные условия и уравнение из (1) для любого $t \geq 0$.

Теорема. Пусть выполнены гипотезы 1'), 2'), 3').

1) Если $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, то решение задачи Коши (1) существует и единственно.

2) Будем считать дополнительно, что

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1, n}),$$

где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ ($k = \overline{0, n}$). Если $g, f'_k \in L_1(\mathbb{R}_+; H)$ ($k = \overline{0, n}$) и $\sigma_k^2 \notin \sigma_{ess}(A)$ ($k = \overline{1, n}$), то при $t \rightarrow +\infty$ для решения задачи Ко-

ши (1) выполнено следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \left\| A^{1/2} \left(u(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2 + \\ & + \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Аналогичные вопросы для полного интегро-дифференциального уравнения изучались в [1].

Литература

1. Загора Д.А. Асимптотическое поведение решений полного интегро-дифференциального уравнения второго порядка / Д.А. Загора // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2022. — Т. 68, № 3. — С. 451–466.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ И НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

А.А. Зверев, С.А. Шабров (Воронеж, ВГУ)

InoplaneTemin@rambler.ru

Применяя концепцию поточечного подхода, предложенного Ю.В. Покорным (см., например, [1]), проведено исследование краевых задач с негладкими решениями, периодическими и антипериодическими краевыми условиями. Изучаемые задачи имеют вид

$$\begin{cases} -(pu')(x) + \int_0^x udQ = F(x) - F(0) - (pu')(0), \\ u(0) = u(l), \\ u'(0) = u'(l), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -(pu')(x) + \int_0^x udQ = F(x) - F(0) - (pu')(0), \\ u(0) = -u(l), \\ u'(0) = -u'(l). \end{cases} \quad (2)$$

Предполагается, что функции $p(x)$, $F(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$, причем $\inf_{[0, l]} p(x) > 0$, $p(0) = p(l)$; функция $Q(x)$

строго возрастает на $[0, l]$; функции $p(x)$, $Q(x)$, $F(x)$ являются непрерывными в точках $x = 0$ и $x = l$. Решения задач (1) и (2) принадлежат классу абсолютно непрерывных функций, производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$.

Доказаны теоремы существования и единственности решений задач (1) и (2). Формулы представления точных решений этих задач найдены в явном виде.

Метод конечных элементов адаптирован для нахождения приближенных решений задач (1) и (2). Соответствующие программы написаны на языках C++ и Python.

Литература

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стильбеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ УСЛОВИЯМИ

М.Б. Зверева (Воронеж, ВГУ)

margz@rambler.ru

Применяя концепцию поточечного подхода, предложенного Ю.В. Покорным (см., например, [1]), проведено исследование краевых задач с разрывными решениями и нелинейными условиями. Изучаемые задачи имеют вид

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + (pu'_\mu)(0) + \int_0^x ud[Q] = F(x) - F(0), \\ u(0) = 0, \\ -p(l)u'_\mu(l) \in N_{[-m,m]}u(l), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -\left(p^i u'_{\mu_i}\right)(x) + \left(p^i u'_{\mu_i}\right)(+0) + \int_0^x u^i d[Q^i] = F^i(x) - F^i(+0), \\ i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n p^i(+0)u'_{\mu_i}(+0) \in N_{[-m,m]}u(0), \\ u^1(0) = u^2(0) = \dots = u^n(0) = u(0), \\ u^i(l_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

Задача (1) представляет собой математическую модель деформаций разрывной струны (цепочки из струн, соединенных пружинами), расположенной вдоль отрезка $[0, l]$, под воздействием внешней нагрузки. Задача (2) моделирует деформации системы из n разрывных струн, расположенных вдоль ребер $(0, l_i)$ геометрического графа - звезды. При этом предполагается, что струны непрерывно соединены между собой в точке $x = 0$, которая соответствует узлу графа. Мы придерживаемся терминологии из [2].

Соответствующие интегро - дифференциальные уравнения здесь описываются в терминах интеграла Стилтеса, понимаемого в расширенном смысле. Этот интеграл был введен Ю.В. Покорным в [1], когда мера всякой точки разрыва интегрирующей функции расщепляется на две составляющие, определяемые левым и правым скачками соответственно. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о таком интеграле, мы заключаем функцию, стоящую под знаком дифференциала, в квадратные скобки. Решения $u(x)$ и $u_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) задач (1) и (2) допускают не более чем счетное множество точек разрыва и терпят разрыв лишь в точках разрыва функций $\mu(x)$ и $\mu_i(x)$ соответственно. Производные понимаются как производные по мерам, порождаемым строго возрастающими на соответствующих промежутках функциями $\mu(x)$ и $\mu_i(x)$.

Нелинейные условия возникают в силу наличия препятствия на перемещение правого конца струны (для задачи (1)) и узловой точки струнной системы (для задачи (2)), представленного отрезком $[-m, m]$. Множество N представляет собой внешний нормальный конус к отрезку $[-m, m]$ в соответствующей точке. В зависимости от приложенной внешней нагрузки, определяемой с помощью функции $F(x)$ для задачи (1) и $F^i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) для задачи (2), соответствующий конец струнной системы либо достигнет границы ограничителя, либо останется свободным. Функции $p(x)$ ($p^i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$) характеризуют силу натяжения струн; функции $Q(x)$ ($Q^i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$) описывают упругость внешней среды.

Доказаны теоремы существования и единственности решений задач (1) и (2). Формулы точных решений этих задач найдены в явном виде. Исследован ряд качественных свойств решений.

Литература

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. — М.: Физматлит, 2004.—272 с.

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ В ОЦЕНКАХ СЛОЖНОСТИ КЛЕТОЧНЫХ СХЕМ: ОТ ФУНКЦИИ ШЕННОНА К ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ

В.С. Зизов (Москва, МГУ)

vzs815@gmail.com

В теории сложности управляющих систем исследуется функция Шеннона $L(n) = \max_{f \in P_2(n)} L(f)$, где $L(f)$ — минимальная площадь схемы, реализующей булеву функцию f . В настоящей работе рассматривается модель клеточных схем [1]. Предлагается новый метод получения нижних оценок сложности, основанный на спектральной теории операторов и аппарате топологических марковских цепей.

Классический подход к нижним оценкам использует подсчёт числа схем ограниченной площади [2]. Для базиса B (с учётом поворотов и отражений) справедлива лемма 1.

Лемма 1. *Число $N(n, k)$ различных клеточных схем площади k , реализующих функции от n переменных, удовлетворяет неравенству*

$$\log_2 N(n, k) < k \log_2 M(B) + n \log_2(k + 1) + O(\log k). \quad (1)$$

Сравнивая число схем с общим числом булевых функций 2^{2^n} , получаем нижнюю оценку

$$L_B(n) \geq 2^n \frac{\log 2}{\log M(B)}. \quad (2)$$

Для базиса B_0 величина $M(B_0) = 45$, откуда $L_{B_0}(n) \geq 0.182 \cdot 2^n$.

Операторный метод улучшения оценок Комбинаторный подход учитывает лишь локальную мощность базиса, игнорируя глобальные ограничения совместимости между клетками. Для их учёта вводится аппарат топологических марковских цепей [3].

Определение 1. Пусть \mathcal{L} — конечный алфавит клеток, $Q = \{0, 1, 2\}$ — алфавит состояний грани. Каждой клетке $\ell \in \mathcal{L}$ сопоставляется частичный оператор $\Phi_\ell : Q \dashrightarrow Q$, где $\Phi_\ell(s) = b(\ell)$ при $t(\ell) = s$, $a(t(\ell), b(\ell))$ — состояния верхней и нижней грани.

Для полосы ширины k определим трансфер-оператор [4] $T_k : \mathbb{R}^{\Sigma_k} \rightarrow \mathbb{R}^{\Sigma_k}$, где $\Sigma_k = Q^k$. Его координаты задаются числом допустимых полос, переводящих верхнюю границу s в нижнюю t :

$$(T_k)_{s,t} = \#\{(\ell_1, \dots, \ell_k) \in \mathcal{L}^k \mid \Phi_{\ell_k} \circ \dots \circ \Phi_{\ell_1}(s) = t\}. \quad (3)$$

Теорема 1. Для топологической марковской цепи $X \subset \mathcal{L}^{\mathbb{Z}^2}$, заданной условиями совместимости, топологическая энтропия $h(X)$ выражается через спектральный радиус [5] $\lambda_k = \rho(T_k)$:

$$h(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \lambda_k. \quad (4)$$

При этом для прямоугольника $k \times n$ имеет место асимптотика $|S_{k \times n}| \sim C_k \lambda_k^n$, $n \rightarrow \infty$.

Из теоремы следует, что эффективное число допустимых конфигураций растёт как $\lambda_k^{n/k}$, а не как $M(B)^n$. Это позволяет заменить константу $M(B)$ в оценке (2) на величину $\sqrt[k]{\lambda_k}$, что даёт более точную нижнюю границу.

Теорема 2. Для базиса B_0 и блока 1×1 матрица T_1 имеет вид

$$T_1 = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 8 \\ 0 & 26 & 0 \end{bmatrix},$$

её спектральный радиус $\lambda_1 \approx 32.4165$. Соответствующая нижняя оценка функции Шеннона:

$$L_{B_0}(n) \geq 2^n \frac{\log 2}{\log \lambda_1} \approx 0.2127 \cdot 2^n.$$

Для блока 2×2 получено значение $\lambda_2^{1/2} \approx 10.771$, что даёт оценку $L_{B_0}(n) \geq 0.291 \cdot 2^n$.

Предложен метод получения нижних оценок сложности клеточных схем, основанный на спектральном анализе трансфер-оператора топологической марковской цепи. Метод позволяет:

1. заменить локальную оценку мощности базиса на глобальную характеристику — спектральный радиус;
2. получить более точные числовые границы (улучшение с 0.182 до 0.291 для базиса B_0);

3. доказать асимптотическую сходимость $L_B(n)/2^n$ к константе, зависящей от базиса.

Дальнейшее развитие метода связано с анализом блоков большего размера и исследованием алгебраических свойств полугруппы частичных операторов, порождённой базисом.

Литература

1. Ложкин С.А. Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов / С.А. Ложкин, В.С. Зизов// Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. — 2020. — Т. 162, № 3. — С. 322–334.
2. Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов / С.С. Кравцов// Проблемы кибернетики. — 1967. — № 19. — С. 285–292.
3. D. Lind, B. Marcus An introduction to symbolic dynamics and coding. // Cambridge University Press. — 2021. — 495 p.
4. M. Reed Methods of modern mathematical physics: Functional analysis // Elsevier — 2012. — 400 p.
5. Seneta E. Non-negative Matrices and Markov Chains // Springer Science & Business Media. — 2006. — 288 p.

СТАБИЛИЗАЦИЯ СЕТЕВОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ВЫХОДОМ И ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГУ, ВГЛТУ)

spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Рассматривается кольцевая сетевая система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$; $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$; $t \in [0, T]$; x_i — количество продукта (ресурса), поставляемого i -ому потребителю, u_i — количество поставляемого продукта (ресурса), поставляемого j -ым поставщиком.

Матрица A в случае кольцевой системы имеет на главной диагонали отрицательные компоненты — это количество неиспользованного продукта, возвращаемого в сеть.

Примером таких систем служат кольцевые системы электроснабжения, водоснабжения, теплоснабжения; газо- и нефте- распределения и т.д.

Наблюдаемыми выходными параметрами являются компоненты y_s , $s = 1, 2, \dots, l$, элемента y :

$$y = Cx, \quad C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l. \quad (2)$$

Система (1) управляется с помощью обратной связи

$$u = Ky. \quad (3)$$

Требуется подобрать компоненты матрицы C , то есть определить, какие x_i следует наблюдать, чтобы существовала матрица обратной связи K такая, чтобы система (1)–(3) была стабилизируемой.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}$ — спектр матрицы $A + BKC$.

Требуется построить C и K такие, что $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$.

Потребители в системе (1) двух видов:

— потребители, которые не переводят часть получаемого продукта другим потребителям (пассивные);

— потребители, которые часть получаемого продукта переводят другим потребителям (активные).

Теорема. Если в качестве компонент y_s положить все те и только те компоненты состояния $x(t)$, которые соответствуют активным потребителям, то существует матрица обратной связи K такая, что система (1)–(3) стабилизируемая.

Таким образом, указан вид матрицы C .

Дается практический способ построения матрицы K .

Литература

1. Шумафов М.М. Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор / М.М. Шумафов // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. — 2019. — Т. 6, вып. 64. — С. 564—591.

2. Зубова С.П. Решение задачи размещения спектра для линейной системы управления, замкнутой обратной связью / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая // Дифференциальные уравнения. — 2024. — Т. 60. № 6. — С. 798–816.

3. Зубова С.П. Алгоритм построения матриц обратной связи в задаче размещения спектра для линейной системы управления / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая // Автоматика и Телемеханика. — 2025. — № 12. — С. 42–65.

О ТОЧКАХ БИФУРКАЦИИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АЗИМУТАЛЬНО-УГЛОМЕСТНОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ОБЪЕКТА ПО ТРЕМ РЕПЕРНЫМ ТОЧКАМ

М.С. Иванова (Воронеж, ВГУ)
Marliberty123@gmail.com

Ранее была исследована задача по определению существования решений при нахождении координат подвижного объекта по трем реперным точкам [1,2]. Для описания неоднозначности решения этой задачи можно свести ее к исследованию операторного уравнения с поиском точек бифуркации..

Введем согласно [3] определение точек ветвления и бифуркации:

Пусть оператор F определен на множестве Ω , $\Omega(x_0, \lambda_0) \subset X + \Lambda$, а значения F лежат в Y (X , Λ и Y — банаховы пространства).

$$F(x, \lambda) = 0 \tag{1}$$

в предположении, что

$$F(x_0, \lambda_0) = 0. \tag{2}$$

Определение 1. Точка (x_0, λ_0) называется *точкой ветвления* уравнения (1), если для любых $r > 0$ и $\rho > 0$ найдется $\lambda \in S_\rho(\lambda_0)$, которому отвечают по крайней мере два решения уравнения (1), лежащих в шаре $S_r(x_0)$.

Определение 2. Точка λ_0 называется *точкой бифуркации* уравнения (1), если точка (x, λ_0) является точкой ветвления этого уравнения.

Пусть d_{ij} — набор трех вещественных положительных чисел, значения которых могут быть длинами треугольника. Определим множество $M(d_{12}, d_{13}, d_{23})$, как множество троек $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$, для которых выполнены условия

$$|\ell_i - \ell_j| \leq d_{ij} \leq \ell_i + \ell_j, \quad 1 \leq i < j \leq 3, \tag{3}$$

причём равенство в (3) достигается не более чем в одном из шести неравенств, либо выполнения одной из трёх систем равенств:

$$\begin{cases} \ell_1 = 0, \\ d_{12} = \ell_2, \\ d_{13} = \ell_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ell_2 = 0, \\ d_{12} = \ell_1, \\ d_{23} = \ell_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ell_3 = 0, \\ d_{13} = \ell_1, \\ d_{23} = \ell_2. \end{cases}$$

Зададим оператор $\Phi(\ell, \lambda) : M \times M \rightarrow R^3$,

$$\Phi(\ell, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 (\ell_1^2 + \ell_2^2 - d_{12}^2) - \ell_1 \ell_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - d_{12}^2) \\ \lambda_1 \lambda_3 (\ell_1^2 + \ell_3^2 - d_{13}^2) - \ell_1 \ell_3 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - d_{13}^2) \\ \lambda_2 \lambda_3 (\ell_2^2 + \ell_3^2 - d_{23}^2) - \ell_2 \ell_3 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - d_{23}^2) \end{pmatrix}.$$

Затем изучим операторное уравнение

$$\Phi(\ell, \lambda) = 0. \quad (4)$$

Точки $((0, d_{12}, d_{13}), (0, d_{12}, d_{13})), ((d_{12}, 0, d_{23}), (d_{12}, 0, d_{23}))$ и $((d_{13}, d_{23}, 0), (d_{13}, d_{23}, 0))$ являются точками ветвления уравнения (4). Рассмотрим уравнение

$$\Phi(\tilde{\ell}_i, \lambda_i) = 0, \quad (5)$$

где $\tilde{\ell}_i = (\ell_1 + \lambda_1, \ell_2 + \lambda_2, \ell_3 + \lambda_3)$.

Тогда точки $((0, d_{12}, d_{13}), (0, d_{12}, d_{13})), ((d_{12}, 0, d_{23}), (d_{12}, 0, d_{23}))$ и $((d_{13}, d_{23}, 0), (d_{13}, d_{23}, 0))$ являются точками бифуркации уравнения (5).

Литература

1. Виноградов А.Д. Детерминированный подход к решению задачи определения координат и угловой ориентации бортовой пеленгаторной антенны по результатам радиопеленгования радиоориентиров. / А. Д. Виноградов, Л. А. Минин, Е. Ю. Морозов, С. Н. Ушаков // Информационно-измерительные и управляющие системы. — Москва, 2019. — Т. 17, №2. — 5-23 с.

2. Иванова М.С. Достаточные условия существования решения в задаче определения местоположения подвижного объекта по трем реперным точкам при помощи азимутально-угломестного метода. / М.С. Иванова, С.Н. Ушаков // Сборник материалов международной Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения». — 2024. — 148-150 с.

3. Треногин В.А. Функциональный анализ. / М.: ФИЗМАТ-ЛИТ — 2002 — 427 с.

ОБ L_2 УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М.И. Илолов, Дж.Ш. Рахматов, С.М. Лашкарбеков

Пусть (Ω, F, P) вероятностное пространство оснащенное возрастающей непрерывной справа фильтрацией $F = \{F_t\}_{t \in [0, \infty)}$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с запаздыванием по времени вида

$$dX_t = F(t, X_t)dt + G(t, X_t)dW_t, \quad t \in [0, \infty), \quad X_t = \zeta(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (1)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} W_t, F_t \in [0, \infty) \quad \text{— стандартное броуновское движение,} \\ \tau \in [0, \infty) \quad \text{— неотрицательное запаздывание по времени,} \\ X_t = \{X(s) \mid s \in [t - \tau, t]\} \subset C([-\tau, 0], \mathbb{R}), \quad t \in [0, \infty), \\ \zeta \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \quad \text{— } \mathcal{F}_0\text{-измеримая случайная величина,} \\ F, G \in C(\mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}), \mathbb{R}) \quad \text{— заданные функции.} \end{array} \right. \quad (2)$$

Условия (2) представляют собой совокупность стандартных инструментов при моделировании реальных процессов (явлений) в биологии, физике, экономике, особенно, в присутствии обратных связей с запаздыванием.

Представляет интерес исследование долгосрочного поведения решения линейного стохастического уравнения с запаздыванием (ЛСУЗ) в форме эволюции по времени второго момента решений, а именно

$$m_2(X_t) = E[X_t^2] \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Для СУЗ общего вида, подобно (1) трудно найти точные результаты известных функций F и G и наличия памяти в системе.

Однако, в случае линейного, однородного по времени СУЗ можно исследовать так называемую функцию комомента в виде

$$K_2X(t, s) = E[X(t)X(s)],$$

которая включает в себе функцию m_2X . Используя теоремы Фубини и свойства линейности интеграла можно показать, что K_2X

удовлетворяет некоторым уравнениям в частных производных с запаздыванием по времени.

Такие уравнения называются непрерывными по времени усиленными системами. Дополнительно будет показано, что решения усиленных систем имеют некоторые специальные свойства. Одно из важных свойств состоит в том, что эти решения полностью определяются своими значениями на диагональной полосе

$$D_\tau^2 = \{(t, s) | s, t \in [-\tau, \infty), |t - s| \leq \tau\}.$$

Оно позволяет использовать результаты теории полугрупп чтобы вывести характеристическое уравнение для определения собственных значений (комплексных) и соответствующих собственных функций. Действительная часть собственных значений определяет поведение $m_2 X$ при $t \rightarrow \infty$.

Второй результат этого исследования касательно усиленных систем является необходимый признак слабой стационарности решений линейных и скалярных СУЗ.

В качестве примера рассмотрим линейное скалярное СУЗ

$$dX_t = (a_0 X_t + a_1 X_{t-\tau})dt + (b_0 X_t + b_1 X_{t-\tau})dW_t, \quad t \in [0, \infty), \quad (3)$$

с действительными числовыми коэффициентами a_0, a_1, b_0, b_1 . Нас будет интересовать дискретная (числовая) схема уравнения (3).

Поэтому на первом этапе мы должны выяснить вид усиленной системы для (3). Далее надо определить важную связь с эволюцией во времени тех стохастических рекуррентных соотношений, которые возникают в результате применения численных методов к линейной СУЗ.

В качестве численного метода мы выбираем «явный метод Эйлера» с шагом дискретизации $h = \tau$. Тогда приходим к численному решению $Y = \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ уравнений

$$Y_{n+1} = Y_n + h(a_0 Y_n + a_1 Y_{n-1}) + \sqrt{h}(b_0 Y_n + b_1 Y_{n-1})\varepsilon_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

где $\{\varepsilon_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ — является последовательностью независимых и идентичных $N(0, 1)$ -распределенных случайных переменных.

Как следует из [1], можно найти вторые моменты от $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, которые удовлетворяют детерминированным рекуррентным соотношениям — так называемой (дискретной по времени) усиленной системы. Пользуясь обозначениями в [1] найдем

$$Z_{n+1} = AZ_n, \quad (5)$$

где

$$Z_{n+1} = [E[Y_{n+1}^2], E[Y_{n+1}Y_n], E[Y_n^2]]^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2a_0h + b_0^2h & 2(a_1h + b_0b_1h) & a_1^2h^2 + b_1^2h \\ 1 + a_0h & a_1h & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Первый столбец этой рекурсии выглядит так

$$E[Y_{n+1}^2] = E[Y_n^2] + h(2a_0 + b_0^2)E[Y_n^2] + 2(a_1 + b_0b_1)E[Y_nY_{n-1}] + \quad (7)$$

$$+ b_1^2E[Y_{n-1}^2] + h^2(a_0^2 + a_1^2E[Y_n^2] + 2a_0a_1E[Y_nY_{n-1}] + a_1^2E[Y_{n-1}^2]).$$

Суммирование обеих частей по первым n повторяющимся слагаемым дает

$$E[Y_{n+1}^2] = E[Y_0^2] + \sum_{k=0}^n [2a_0E[Y_k^2] + 2a_1E[Y_kY_{k-1}] + b_0^2E[Y_k^2] +$$

$$+ 2b_0b_1E[Y_kY_{k-1}] + b_1^2E[Y_{k-1}^2]]h + h \sum_{k=0}^n [a_0^2 + b_0^2E[Y_k^2] +$$

$$+ 2a_0a_1E[Y_kY_{k-1}] + a_1^2E[Y_{k-1}^2]]h. \quad (8)$$

Далее предположим, что решетка $t_0 - \tau + \tau N$ является эквидистантной и рассмотрим ступенчатые функции $n = 0 \dots \infty Y_n I(t_n, t_{n+1})$ и убедимся в эквивалентности уравнения (8) и следующего уравнения

$$E[X_h(t_{n+1})^2] =$$

$$= E[X_h(t_0)^2] + 2 \sum_{k=0}^n [a_0E[X_h(t_k)^2] + a_1E[X_h(t_k)X_h(t_k - 1)]](t_{k+1} - t_k) +$$

$$+ \sum_{k=0}^n [b_0^2E[X_h(t_k)^2] + 2b_0b_1E[X_h(t_k)X_h(t_k - \tau)] + b_1^2E[X_h(t_k - \tau)^2]](t_{k+1} - t_k) +$$

$$+ h \sum_{k=0}^n [a_0^2 + b_0^2E[X_h(t_{k-1})^2] + 2a_0a_1E[X_h(t_k)X_h(t_{k-1})] + a_1^2E[X_h(t_{k-1})^2]](t_{k+1} - t_k) =$$

$$= E[X_h(t_0)^2] + 2 \int_{t_0}^{t_{n+1}} (a_0E[X_h(s)^2] + a_1E[X_h(s)X_h(s - \tau)])ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_{n+1}} (b_0^2E[X_h(s)^2] + 2b_0b_1E[X_h(s)X_h(s - \tau)] + b_1^2E[X_h(s - \tau)^2])ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_{n+1}} (a_0^2 + b_0^2 E[X_h(s-\tau)^2] + 2a_0a_1 E[X_h(s)X_h(s-\tau)] + a_1^2 E[X_h(s-\tau)^2]) ds. \quad (9)$$

Если теперь h устремим к нулю в (9) и учитываем, что тогда ступенчатая функция X_h стремится к точному решению X уравнения (3) в пространстве Делфур-Миттер $M([- \tau, t], \mathbb{R})$ (см. [2]), то мы ожидаем, что ожидание X удовлетворяет уравнению

$$E[X_t^2] = E[X_0^2] + \int_0^t (2a_0 E[X(s)^2] + 2a_1 E[X(s)X(s-\tau)]) ds + \int_0^t (b_0^2 E[X(s)^2] + 2b_0b_1 E[X(s-\tau)^2] + b_1^2 E[X(s-\tau)^2]) ds. \quad (10)$$

Второй столбец рекуррентного соотношения (5) имеет вид

$$E[Y_{n+1}Y_n] = E[Y_n^2] + h(a_0 E[Y_n^2] + a_1 E[Y_n Y_{n-1}]). \quad (11)$$

Здесь суммирование не приводит к отмене суммируемых в обеих частях. Далее, увеличение размерности дискретной задачи через устремление h к нулю может привести к бесконечным суммам. Однако, заметим, что (11) эквивалентен следующему равенству

$$\frac{1}{h} (E[Y_{n+1}Y_n] - E[Y_n^2]) = (a_0 E[Y_n^2] + a_1 E[Y_n Y_{n-1}]) \quad (12)$$

или

$$\frac{1}{h} (E[X(t_n+h)X(t_n)] - E[X(t_n)X(t_n)]) = (a_0 E[X(t_n)^2] + a_1 E[X(t_n)X(t_n-\tau)]). \quad (13)$$

Возвращаясь к первому столбцу рекуррентной схемы (5) с учетом соотношений (12) и (13) увидим, что можно повторить это сходство в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (E[X(t_n+h)^2] - E[X(t_n)^2]) &= 2(a_0 E[X(t_n)^2] + a_1 E[X(t_n)X(t_n-\tau)]) + \\ &+ b_0^2 E[X(t_n)^2] + 2b_0b_1 [X(t_n)X(t_n-\tau)] + b_1^2 E[X(t_n-\tau)^2] + \\ &+ h(a_0a_1 E[X(t_n)X(t_n-\tau)] + a_1^2 E[X(t_n-\tau)^2]). \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (13) и (14) показывают, что для численного явного метода Эйлера рекуррентное соотношение (5) для моментов второго порядка генерируемого численного решения Y может быть понято

как система уравнений с вовлеченными частичными разностными величинами. Подобно (10) это приводит к гипотезе для непрерывных по времени усиленных систем для линейных СДУЗ: Уравнения в частных производных будут иметь решения в виде комоментной функции точного решения X уравнения (7).

Близкие вопросы изучены для стохастических дробных уравнений в работах [3-7]

Литература

1. Mao, X. Stochastic differential equations and their applications, Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications / X. Mao // Chichester: Horwood Publishing. — 1997.

2. Gilsing, H. On L^P -stability of numerical schemes for Affine Stochastic Delay Differential Equations: Stochastic recurrence relations / H. Gilsing // Discussion paper SFB 373. — (59). — 2002.

3. Samoilenko A.M. On the theory of evolution equations with impulse action / A.M. Samoilenko, M.I. Polov // Doklady Akademii Nauk, 1991. —4(316). —822-825.

4. Илолов М. Об абстрактных уравнениях с неограниченными нелинейностями и их приложениях / М. Илолов, Х.С. Кучакшоев // Доклады Академии наук. — 2009. —3(498). —310-312.

5. Илолов М. О дробных линейных уравнениях Вольтерра в банаховых пространствах / М. Илолов, Х.С. Кучакшоев, Д.Н. Гулджонов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. —2018. — 8 (61). —113-120.

6. Polov, M. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model / M. Polov, R.S Kuchakshoev, J.S. Rahmatov // Communications on Stochastic Analysis. —2020, 14(3-4), pp. 55-69

7. Polov M. Fractional stochastic evolution equations with Balakrishnan's white noise / M. Polov, S Lashkarbekov, J.S. Rahmatov // Global and Stochastic Analysis. —2022. — Vol. 9. — No. 3. —p. 53-70

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ¹

М.И. Исмаилов, С.А. Нуриева,
С.И. Джафарова (Азербайджанский Государственный
 Университет нефти и промышленности,
 Азербайджанский университет туризма и менеджмента,
 Институт Математики Азербайджана)
migdad-ismailov@rambler.ru

В области $D = [0, T] \times [0, \pi]$ рассматривается уравнение

$$u_{tt}(t, x) - \alpha u_{txx}(t, x) = F(u)(t, x) \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x), \quad (2)$$

$$u(t, \pi) = u(t, 0) = 0, \quad (3)$$

где $T > 0$, $\alpha > 0$ - фиксированные числа, F - заданный, вообще говоря, нелинейный оператор, φ, ψ - заданные функции.

В [1] было изучено обобщенное решение задачи (1)-(3) в B -пространстве $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}}$, $p > 2$, (при $p = 2$ в [2], $q = p'$ - сопряженный показатель к p) в виде

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx. \quad (4)$$

Пусть $B_{(p),p,T}^{1+\frac{2}{q}, \frac{2}{q}}$ - B -пространство функций вида (4):

$$\begin{aligned} \|u\|_{(p),p,T} &= \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{1+\frac{2}{(p-\varepsilon)'}} \|u_n\|_C \right)^{p-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \\ &+ \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{2}{(p-\varepsilon)'}} \left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_C \right)^{p-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty. \end{aligned}$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Науки Азербайджана - Грант № АЕФ-МГС-2025-1(54)-20/03/1-М-03.

© Исмаилов М.И., Нуриева С.А., Джафарова С.И., 2026

Обозначим через $L_p(D)$ - гранд пространство Лебега, $(L_p(D))'$ ассоциированное к $L_p(D)$ пространство, $l_{(p),p-2}$ - B -пространство числовых последовательностей $\{f_n\}_{n \in N}$ с нормой

$$\|\{f_n\}_{n \in N}\|_{(p),p-2} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-\varepsilon-2} |f_n|^{p-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}},$$

$L_{(p),p-2}(0, T)$ - B -пространство функций вида (4):

$$\|u\|_{(p),p-2} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-\varepsilon-2} \int_0^T |u_n(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty.$$

Определение. Функция $u \in B_{(p),p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ называется обобщенным решением задачи (1)-(3), если выполняются условие (2) и

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^\pi \{u_t(t, x)v_t(t, x) - \alpha u_{xx}(t, x)v_t(t, x) + F(u)(t, x)v(t, x)\} dx dt = \\ = \int_0^\pi (\alpha \varphi''(x) - \psi(x))v(0, x) dx, \end{aligned}$$

для любых функций $v(t, x)$ таких, что $v \in (W_p^1(D))'$, $v(T, x) = 0$ для п.в. $x \in [0, \pi]$, $v(0, x) \in (L_p(0, \pi))'$.

Рассмотрим функцию $w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin nx$, где $w_n(t) = \varphi_n + \frac{1}{\alpha n^2} (1 - e^{-\alpha n^2 t}) \psi_n$. Пусть $L = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left(\frac{1}{\alpha} T^{\frac{p-\varepsilon-1}{p-\varepsilon}} + \left(\frac{p-\varepsilon-1}{\alpha(p-\varepsilon)} \right)^{\frac{p-\varepsilon-1}{p-\varepsilon}} \right)$.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

- (1) $\varphi \in C^1([0, \pi]) \cap W_p^2(0, \pi)$, $\{n^2 \varphi_n\}_{n \in N} \in l_{(p),p-2}$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$;
- (2) $\psi \in C([0, \pi]) \cap W_p^1(0, \pi)$, $\{n \psi_n\}_{n \in N} \in l_{(p),p-2}$, $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$;
- (3) $F : B_{(p),p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}} \rightarrow L_{(p),p-2}(0, T)$, $\forall u \in B_{(p),p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ и $t \in [0, T]$:

$$\|F(u)\|_{L_{(p),p-2}(0,t)} \leq \int_0^t (a(\tau) + b(\tau) \|u\|_{(p),p,\tau}) d\tau;$$

(4) $\forall u, v \in K \left(\|u\|_{(p),T} \leq R \right)$ и $t \in [0, T]$:

$$\|F(u) - F(v)\|_{L_{(p),p-2}(0,t)} \leq \int_0^t c(\tau) \|u - v\|_{(p),p,\tau} d\tau,$$

где $a(t), b(t), c(t) \in L_1(0, T)$, $R = A \exp \int_0^T B(t) dt$, $A = \|w\|_{(p),p,T} + L \|a\|_1$, $B(t) = Lb(t)$.

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение.

Литература

1. Bilalov B.T. On solvability of one class of third order differential equations / B.T. Bilalov, I.M. Ismailov, Z.A. Kasumov// UMJ. - 2021. №3. - С. 314-328.

2. Худавердиев К. Исследование смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью/ А. Велиев// - Баку: Чашыоглу, - 2010. - 168 с.

О ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНАМИ БЕССЕЛЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.В. Кабанко, О.А. Наумова (Курск, ГГУ)

kabankom@gmail.com

Эта работа посвящена изучению вопросов аппроксимации классов функций в весовом гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x))$ классическими ортогональными многочленами, ассоциированными с весом $\omega(x) = x^2 e^{-\frac{x}{\alpha}}$. Задачи аппроксимации функций в которых использовались системы ортогональных многочленов с весом рассматривались в многочисленных работах С.Б. Вакарчука, В.А. Абилова, Ф.В. Абиловой и других авторов (см. [1,2]). Эта работа продолжает эту тематику.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$s_2(x)y'' + s_1(x)y' + \lambda y = 0,$$

где $s_2(x)$ – многочлен второй степени, а $s_1(x)$ – многочлен степени не выше первой. Как известно, классические ортогональные многочлены являются собственными функциями такого вида уравнений. Случаи многочленов Эрмита, Лагерра, Чебышёва, Якоби рассмотрены в работах [1,2]. Если $s_2(x) = x^2$, а $s_1(x)$ –линейна, то собственные

функции этого уравнения – это многочлены Бесселя $B_n(x)$ (см. [3]).

В смысле сходимости по норме пространства $L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x))$ можно записать разложение функции $f \in L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x))$ по многочленам системы $\{B_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и n -ую частичную сумму этого разложения:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) B_k(x), \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k(f) B_k(x).$$

Определение 1. (см. [1]) *Величиной наилучшего приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x))$ элементами подпространства \mathcal{P}_n многочленов степени не выше n называется*

$$E_n(f, L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x)), \mathcal{P}_n) = \inf_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_{L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x))}.$$

Если \mathcal{X} – некоторый класс функций из $L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x))$, то будем обозначать

$$E_n(\mathcal{X}) = \sup_{f \in \mathcal{X}} E_n(f, L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x)), \mathcal{P}_n).$$

Если ввести в рассмотрение дифференциальный оператор вида

$$D = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}$$

и множество $L_2^r(D, \mathbb{R}^+, \omega(x))$ функций $f \in L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x))$, таких, что $D^r f \in L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x))$. На основе этого множества в работе [2] введены классы функций

$$W_2^r(D, \mathbb{R}^+, \omega(x)) = \{f \in L_2^r(D, \mathbb{R}^+, \omega(x)) : \|D^r f\|_{L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x))} \leq 1\}.$$

Таким образом можно сформулировать аналог теоремы С.В. Вакарчука из [1].

Теорема 1. *Если $n, s, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $s < r$, то будет справедливо неравенство*

$$\sup_{W_2^r(D, \mathbb{R}^+, \omega(x)), f \in \mathcal{P}_n} \frac{E_n(D^s f, L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x)), \mathcal{P}_n)}{E_n^{1-\frac{s}{r}}(f, L_2(\mathbb{R}^+, \omega(x)), \mathcal{P}_n)} \leq 1.$$

Литература

1. Вакарчук С.В. О приближении классическими ортогональными полиномами с весом в пространствах $L_{2,\gamma}(a, b)$ и о поперечниках

функциональных классов /С.Б. Вакарчук // Изв. вузов. Матем. — 2019. — № 12. С. 37–51. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-12-37-51>

2. Абилов В.А. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье–Эрмита в пространстве $L_2(\mathbb{R}; e^{-x^2})$ /В.А. Абилов, Ф.В. Абилова // Изв. вузов. Матем. — 2006. — № 1. С. 3–12. <http://mi.mathnet.ru/ivml145>

3. Никифоров А.Ф. Специальные функции математической физики /А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров // — М. : Наука, 1984. — 344 с.

ПРОГРАММНЫЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Е.Н. Кабина, О.В. Кунаковская (Воронеж, ВГУ)
newovk@yandex.ru

К исследованию уравнения ван дер Ваальса привлечен язык программирования Python. В 1873 г. Йоханнес Дидерик ван дер Ваальс (1837–1923) предложил уравнение, которое используется для описания фазового перехода жидкость–газ. Это уравнение явилось большим шагом к пониманию поведения реальных газов и жидкостей. Уравнение ван дер Ваальса имеет вид

$$(P + \frac{\alpha}{V^2})(V - \beta) = RT,$$

где P — давление (атм), V — объём (л/моль), T — температура (K), R — универсальная газовая постоянная (0.0821 л · атм/моль · K), α — поправка на притяжение молекул, β — поправка на собственный объём молекул.

Для уравнения идеального газа изотермы представляют собой гиперболы с осями P и V в качестве асимптот, так как при постоянной температуре $T = const$ давление обратно пропорционально объёму. Для жидкости ван дер Ваальса (вещества, удовлетворяющего уравнению ван дер Ваальса) при $T > T_c$ изотермы монотонно убывают (похожи на изотермы идеального газа); при $T = T_c$ на изотерме появляется точка перегиба (критическая точка); при $T < T_c$ появляется S -образный неустойчивый участок. Такой S -образный участок физически нереализуем, так как противоречит условию стабильности термодинамической системы.

Критические параметры: $P_c = \frac{\alpha}{27\beta^2}$, $V_c = 3\beta$, $T_c = \frac{8\alpha}{27\beta R}$. При критических параметрах исчезает различие между жидкостью и газом, происходит фазовый переход жидкость-газ. Плавное изменение параметров приводит к скачкообразному изменению состояния системы.

При применении редукции Фаулера [9], [7] к уравнению ван дер Ваальса получаем уравнение $x^3 + ax + b = 0$ поверхности Π (поверхности катастрофы сборки Уитни) в пространстве \mathbf{R}^3 с координатами (x, a, b) .

Поверхность Π — это двумерное многообразие, гладкая структура на котором задается гладким атласом, состоящим из одной карты $\varphi : \Pi \rightarrow \mathbf{R}^2$, $(x, a, b) \mapsto (x, a)$. При фиксированных a, b поверхность Π дает все критические точки функции $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{2}x^2 + bx$ (потенциала катастрофы сборки).

В рамках данной работы построена обширная и детализированная серия графиков с использованием Python-скриптов для подбора параметров визуализации (масштабы, углы обзора, цветовые схемы). При построении графиков в Python (изотермы ван дер Ваальса, поверхность катастрофы сборки Уитни и ее сечений, фазовые диаграммы) для генерации кода использованы библиотеки `numpy` и `matplotlib`. ИИ-инструменты (например, ChatGPT, GitHub Copilot). В докладе будут приведены листинги всех программ.

Литература

1. Арнольд В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. — М.: Наука, 1990. — 128 с.
2. Борисович Ю.Г. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. — М.: ЛЕНАНД, 2025. — 504 с.
3. Гулл Х. Компьютерное моделирование в физике / Х. Гулл, Я. Тобочник. — М.: Мир, 1990. — Т. 1 — 350 с., т. 2. — 400 с.
4. Златопольский Д. М. Основы программирования на языке Python / Д. М. Златопольский. — М.: ДМК Пресс, 2017. — 284 с.
5. Ландау Л.Д. Статистическая физика, часть 1 / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Наука, 1976. — 584 с.
6. Лутц М. Изучаем Python / М. Лутц. — СПб.: ООО “Диалектика”, 2019. — 832 с.
7. Постон Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
8. Сивухин Д.В. Общий курс физики / Д.В. Сивухин. — М.: Наука, 1975. — Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. — 519 с.

9. Fowler D.H. The Riemann-Hugoniot catastrophe and van der Waals' equation. In: Towards a Theoretical Biology (C.H. Waddington, ed.) / D.H. Fowler. – Edinburgh University Press, Edinburgh, 1968-1972. – Vol. 4, pp. 1-7.

10. Woodcock A.E.R. Geometrical Study of the Elementary Catastrophes / A.E.R. Woodcock, T.A. Poston. – Lecture Notes in Mathematics 373, Springer, Berlin and New York, 1974. – 317 p.

**ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА
НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ РЕБРАМИ**

С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова

(Магнитогорск, МГТУ им. Г.И. Носова)

sikadchenko@mail.ru

На графе-звезда G_t , у которого длины ребер изменяются во времени по законам $L_j = l_j L(t)$, $l_j \in R_+$, $j = \overline{1, j_0}$ рассматриваются обратные спектральные задачи нахождения значений функций $p_{1j}(x_j, t)$ и $p_{0j}(x_j, t)$ по известным собственным числам μ следующей спектральной задачи

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} + p_{1j}(x_j, t) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + p_{0j}(x_j, t) u_j = \mu u_j, \quad x_j \in (0, L_j(t)),$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) \dots = u_{j_0}(0, t) = 0,$$

$$u_1(L_1(t), t) = u_2(L_2(t), t) \dots = u_{j_0}(L_{j_0}(t), t),$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \Big|_{x_j=L_j(t)} = 0, \quad u_j(x_j, 0) = \zeta(x_j), \quad j = \overline{1, j_0}.$$

С помощью замены переменных

$$y_j = \frac{x_j}{L(t)}, \quad t_1 = t,$$

перейдем к соответствующим спектральным задачам на графе G_0 с постоянными длинами ребер.

Используя методику вычисления значений собственных чисел дискретных полуограниченных дифференциальных операторов разработанную в статье [1], получим формулы позволяющие вычислять их собственные числа $\mu_n(t)$

$$\mu_n(t) = -\lambda_n + D_n^2 \int_0^t R_n(\tau) \frac{e^{-2\lambda\tau}}{L(\tau)} d\tau + \int_0^t \sum_{j=1}^{j_0} \int_0^{l_j} [p_{0j}(y_j, \tau)\omega_{jn}(y_j, \tau) + \frac{p_{1j}(y_j, \tau)}{L(\tau)} \frac{\partial\omega_{jn}(y_j, \tau)}{\partial y_j}] \omega_{jn}(y_j, \tau) dy_j d\tau.$$

Здесь

$$\omega_{jn}(y_j, t) = \frac{B_{nj}D_n(t)}{\sin(\lambda_n l_j)} \sin(\lambda_n y_j) e^{-\lambda_n t},$$

$$D_n = \sqrt{\frac{2\lambda_n}{1 - e^{-2\lambda_n t}}}, \quad B_{nj} = \sqrt{\frac{2}{\sum_{j=1}^{j_0} l_j - \frac{\sin(2\lambda_n l_j)}{2\lambda_n}}},$$

$$\lambda_n - \text{корни трансцендентного уравнения } \sum_{j=1}^{j_0} \text{ctg}(\lambda l_j) = 0.$$

Воспользовавшись разработанной методикой решения обратных задач [2] находятся искомые значения функций $p_{1j}(x_j, t)$ и $p_{0j}(x_j, t)$. Проведенные вычислительные эксперименты показали высокую вычислительную эффективность разработанной методики.

Литература

1. Кадченко С.И. Алгоритмы вычисления собственных значений дискретных полуограниченных операторов заданных на квантовых графах / С.И. Кадченко // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Физика. 2023. —Т. 15, № 3. — С. 6–25.
2. Кадченко С.И. Восстановление функций при старших производных операторов в обратных спектральных задачах / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова, О.А. Торшина // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования. 2023. —Т. 14, № 1. — С. 77–80.

**ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЗАДАННЫЕ
НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДА С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ
РЕБРАМИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДАЛАМБЕРА
С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова**

На графе-звезда G_t , у которого длины ребер изменяются во времени по законам $L_j = l_j L(t)$, $l_j \in R_+$, $j = \overline{1, j_0}$ рассматриваются обратные спектральные задачи нахождения значений функций $p_{1j}(x_j, t)$ и $p_{0j}(x_j, t)$ по известным собственным числам μ следующей спектральной задачи

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} + p_{1j}(x_j, t) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + p_{0j}(x_j, t) u_j = \mu u_j, \quad x_j \in (0, L_j(t)),$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) \dots = u_{j_0}(0, t) = 0,$$

$$u_1(L_1(t), t) = u_2(L_2(t), t) \dots = u_{j_0}(L_{j_0}(t), t),$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \left. \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right|_{x_j=L_j(t)} = 0, \quad u_j(x_j, 0) = \zeta(x_j), \quad \left. \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|_{t=0} = \xi(x_j).$$

С помощью замены переменных

$$y_j = \frac{x_j}{L(t)}, \quad t_1 = t,$$

перейдем к соответствующим спектральным задачам на графе G_0 с постоянными длинами ребер.

Используя методику вычисления значений собственных чисел дискретных полуограниченных дифференциальных операторов разработанную в статье [1], получим формулы позволяющие вычислять их собственные числа $\mu_n(t)$

$$\begin{aligned} \mu_n(t) = & \int_0^t \sum_{j=1}^{j_0} \int_0^{l_j} \left[\frac{\partial^2 \omega_{jn}(y_j, \tau)}{\partial \tau^2} + \frac{\dot{L}(\tau) y_j^2 - 1}{L^2(\tau)} \frac{\partial^2 \omega_{jn}(y_j, \tau)}{\partial y_j^2} - \right. \\ & - 2 \frac{\dot{L}(\tau)}{L(\tau)} y_j \frac{\partial^2 \omega_{jn}(y_j, \tau)}{\partial y_j \partial \tau} + \frac{p_{1j}(y_j, \tau)}{L(\tau)} \frac{\partial \omega_{jn}(y_j, \tau)}{\partial y_j} + p_{0j} \omega_{jn}(y_j, \tau) + \\ & \left. + \frac{2\dot{L}(\tau) - L(\tau)\ddot{L}(\tau)}{L^2(\tau)} y_j \frac{\partial \omega_{jn}(y_j, \tau)}{\partial y_j} \right] \omega_{jn}(y_j, \tau) dy_j d\tau + \delta_n(t) \end{aligned}$$

. Здесь

$$\omega_{jn}(y_j, t) = \frac{B_{nj}D_n(t)}{\sin(\lambda_n l_j)} \sin(\lambda_n y_j) e^{-\lambda_n t},$$

$$D_n = \sqrt{\frac{2\lambda_n}{1 - e^{-2\lambda_n t}}}, \quad B_{nj} = \sqrt{\frac{2}{\sum_{j=1}^{j_0} \frac{l_j - \frac{\sin(2\lambda_n l_j)}{2\lambda_n}}{\sin^2(\lambda_n l_j)}}},$$

λ_n – корни трансцендентного уравнения $\sum_{j=1}^{j_0} \text{ctg}(\lambda l_j) = 0$.

Воспользовавшись разработанной методикой решения обратных задач [2] находятся искомые значения функций $p_{1j}(x_j, t)$ и $p_{0j}(x_j, t)$. Проведенные вычислительные эксперименты показали высокую вычислительную эффективность разработанной методики.

Литература

1. Кадченко С.И. Алгоритмы вычисления собственных значений дискретных полуограниченных операторов заданных на квантовых графах / С.И. Кадченко // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Физика. 2023. —Т. 15, № 3. — С. 6–25.

2. Кадченко С.И. Восстановление функций при старших производных операторов в обратных спектральных задачах / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова, О.А. Торшина // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования. 2023. —Т. 14, № 1. — С. 77-80.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

К.Т. Каримов, Ш.Р. Фармонов (Фергана, ФерГУ)

karimovk80@mail.ru, farmonovsh@gmail.com

Пусть Ω — конечная односвязная область плоскости xOy , ограниченная отрезками $\overline{AB} = \{(x, y): x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, $\overline{DO} = \{y = 0, -1 \leq x \leq 0\}$, $\overline{EO} = \{x = 0, -1 \leq y \leq 0\}$ и характеристическими дугами $\overline{BD} = \{(x, y): \sqrt{-x} + \sqrt{y} = 1, x \leq 0, y \geq 0\}$, $\overline{EA} = \{(x, y): \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1, x \geq 0, y \leq 0\}$.

Координатные оси $x = 0$, $y = 0$ и прямая $x + y = 0$ разбивают Ω на пять областей: $\Omega_0 = \Omega \cap \{x > 0, y > 0\}$, $\Omega_j = \Omega \cap \{\kappa_j(x + y) > 0, \sigma_j x + \sigma_{j-1} y < 0\}$, где $\kappa_j = (-1)^{[(j-1)/2]}$, $\sigma_j = \frac{1+(-1)^j}{2}$, $j = \overline{1, 4}$, а $[\cdot]$ — целая часть числа. Обозначим $G = \Omega \setminus \{xy(x + y) = 0\}$.

В области G рассматривается уравнение

$$L_{\alpha, \alpha}[u] \equiv xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \alpha u_y + (x + y)\lambda u = 0, \quad (1)$$

где α — заданное число, $0 < \alpha < 1/2$, а λ — параметр.

Задача $F_\lambda^{(2)}$. Найти значения λ и нетривиальные функции $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C_{x,y}^{2,2}(G)$, удовлетворяющие уравнению (1) и условиям:

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overline{AB}; \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} (-y)^\alpha u_y(x, y) = - \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha u_y(x, y), \quad 0 < x < 1; \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} (-x)^\alpha u_x(x, y) = - \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, y), \quad 0 < y < 1; \quad (4)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (x, 0) \in \overline{OD}; \quad (5)$$

$$u(0, y) = 0, \quad (0, y) \in \overline{OE}; \quad (6)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha u_y(x, y) + \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha u_y(-x, y) = 0, \quad (x, 0) \in OD; \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, y) + \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, -y) = 0, \quad (0, y) \in OE. \quad (8)$$

Считая $\lambda \neq 0$, нетривиальные в $\overline{\Omega}_0$ решения задачи $F_\lambda^{(2)}$ ищем в виде $u(x, y) = R(r)\Phi(\varphi)$, где $x = r^2 \cos^2 \varphi$, $y = r^2 \sin^2 \varphi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Тогда из (1) получим уравнения

$$r^2 R''(r) + (1 + 4\beta) r R'(r) + (4\lambda r^2 - \mu) R(r) = 0, \quad 0 < r < 1; \quad (9)$$

$$\Phi''(\varphi) + 4\beta \operatorname{ctg}(2\varphi) \Phi'(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi/2, \quad (10)$$

где $\beta = \alpha - 1/2$ и μ — константа разделения.

Пользуясь общими решениями уравнений (9) и (10), находим, что нетривиальные и непрерывные в $\overline{\Omega}_0$ решения уравнения (1), удовлетворяющую условию $R(0) = 0$, имеют вид [1]

$$u(x, y) = r^{-2\beta} J_\omega(2\sqrt{\lambda} r) \left\{ c_1 F\left(\beta - \frac{\omega}{2}, \beta + \frac{\omega}{2}, \frac{1}{2} + \beta; \sin^2 \varphi\right) + c_2 (\sin^2 \varphi)^{1/2-\beta} F\left(\frac{1-\omega}{2}, \frac{1+\omega}{2}, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2 \varphi\right) \right\}, \quad (11)$$

где $\omega = \sqrt{4\beta^2 + \mu}$, $\text{Re } \omega > -2\beta$.

Из (11) следует:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= c_1(\sqrt{x})^{-2\beta} J_\omega(2\sqrt{\lambda x}), & 0 \leq x \leq 1; \\ u(0, y) &= [k_1(\omega)c_1 + k_2(\omega)c_2](\sqrt{y})^{-2\beta} J_\omega(2\sqrt{\lambda y}), & 0 \leq y \leq 1; \\ \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha u_y &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c_2 \cdot 2^{-2\beta} (\sqrt{x})^{-1} J_\omega(2\sqrt{\lambda x}), & 0 < x < 1; \\ \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x &= -\frac{k_3(\omega)c_1 + k_4(\omega)c_2}{2^{2\beta} \sqrt{y}} J_\omega(2\sqrt{\lambda y}), & 0 < y < 1, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\text{где } k_1(\omega) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \beta)\Gamma(\frac{1}{2} - \beta)}{\Gamma(\frac{1+\omega}{2})\Gamma(\frac{1-\omega}{2})}, \quad k_2(\omega) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \beta)\Gamma(\frac{1}{2} - \beta)}{\Gamma(1 - \beta + \frac{\omega}{2})\Gamma(1 - \beta - \frac{\omega}{2})},$$

$$k_3(\omega) = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{2} + \beta)}{\Gamma(\beta + \frac{\omega}{2})\Gamma(\beta - \frac{\omega}{2})}, \quad k_4(\omega) = \left(\frac{1}{2} - \beta\right)k_1(\omega).$$

В области Ω_1 вводим $W(x, y) = u(x, y) - u(-y, -x)$, $(x, y) \in \bar{\Omega}_1$. Поскольку $L_{\alpha, \alpha}$ инвариантен относительно $(x, y) \mapsto (-y, -x)$, имеем $L_{\alpha, \alpha}[W] = 0$ в Ω_1 и $W|_{x+y=0} = 0$. Разделяя переменные в координатах $\rho = \sqrt{x+y}$, $\theta = x/(x+y)$ и используя (3), (6), находим

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= k_5(\omega)c_3 \cdot 4^{-\beta} (\sqrt{x})^{-2\beta} J_\omega(2\sqrt{\lambda x}), & 0 \leq x \leq 1; \\ \left(\frac{1}{2} - \beta\right)c_2 &= -k_6(\omega)c_3 \cdot 2^{-2\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\text{где } k_5(\omega) = \frac{\Gamma(1 + \omega)\Gamma(\frac{1}{2} - \beta)}{\Gamma(1 - \beta + \frac{\omega}{2})\Gamma(\frac{1+\omega}{2})}, \quad k_6(\omega) = \frac{\Gamma(1 + \omega)\Gamma(\frac{1}{2} + \beta)}{\Gamma(\beta + \frac{\omega}{2})\Gamma(\frac{1+\omega}{2})}.$$

Аналогично из условий (4) и (5) для области Ω_2 получим

$$\left. \begin{aligned} k_1(\omega)c_1 + k_2(\omega)c_2 &= k_5(\omega)c_4 \cdot 4^{-\beta}; \\ k_3(\omega)c_1 + k_4(\omega)c_2 &= -k_6(\omega)c_4 \cdot 2^{-2\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Исключая c_3, c_4 из (12)–(14), получим однородную систему на c_1, c_2 . Благодаря соотношению $k_4 = (\frac{1}{2} - \beta)k_1$ условие нетривиальности принимает вид $k_2k_6^2 = (\frac{1}{2} - \beta)k_3k_5^2$. С помощью формулы дополнения $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ это соотношение приводится к трансцендентному уравнению

$$\sin^2\left(\beta\pi - \frac{\omega\pi}{2}\right) = \cos^2 \frac{\omega\pi}{2} - \cos^2(\beta\pi), \quad (15)$$

которое факторизуется в произведение $\sin\left(\frac{\omega\pi}{2} - \beta\pi\right) \cdot \sin \frac{\omega\pi}{2} = 0$ и при условии $\text{Re } \omega > -2\beta$ доставляет две серии решений, чередующиеся при упорядочении по возрастанию:

$$\omega_n = \begin{cases} n + 1 + 2\beta, & n - \text{нечётное,} \\ n, & n - \text{чётное,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Из условия (2), получим $J_{\omega_n}(2\sqrt{\lambda}) = 0$.

Обозначая через $\theta_{n,m}$ m -й положительный нуль $J_{\omega_n}(z)$, находим собственные значения задачи $F_{\lambda}^{(2)}$:

$$\lambda_{n,m} = \frac{\theta_{n,m}^2}{4}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

и соответствующие им собственные функции в области Ω_0 :

$$u_{n,m}(x, y) = c_{n,m} r^{-2\beta} J_{\omega_n}(\theta_{n,m} r) \left\{ F\left(\beta - \frac{\omega_n}{2}, \beta + \frac{\omega_n}{2}, \frac{1}{2} + \beta; \sin^2 \varphi\right) + \right. \\ \left. + \varkappa(\omega_n)(\sin^2 \varphi)^{1/2-\beta} F\left(\frac{1-\omega_n}{2}, \frac{1+\omega_n}{2}, \frac{3}{2} - \beta; \sin^2 \varphi\right) \right\}, \quad (18)$$

где $c_{n,m} \neq 0$, $\varphi = \arctg(\sqrt{y}/\sqrt{x})$, $r = \sqrt{x+y}$, а $\varkappa(\omega_n) = -k_6(\omega_n)/[(\frac{1}{2} - \beta)k_5(\omega_n)]$.

В гиперболических областях Ω_j , $j = \overline{1,4}$, собственные функции находятся как решения видоизменённой задачи Коши для уравнения (1).

Литература

1. Салахитдинов М.С. К спектральной теории уравнений смешанного типа / М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов. — Т. : Mumtoz so'z, 2010. — 356 с.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВОЛНОВОГО ЗОНДИРОВАНИЯ В $2D^1$ М.Ю. Кокурин, Д.А. Пахмутов (Йошкар-Ола, МарГУ) *kokurim@yandex.ru, dmitryaric@mail.ru*

В докладе исследуется обратная задача волнового зондирования для уравнения волн в неоднородной двумерной среде, сводимая к линейному интегральному уравнению М.М. Лаврентьева. Устанавливаются условия на расположение линий источников и детекторов, обеспечивающие единственность решения этого уравнения.

Процесс волнового зондирования описывается уравнением

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = \delta(x-z)\delta(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3; \quad u(x, t)|_{t < 0} \equiv 0. \quad (1)$$

Здесь $z \in \mathbb{R}^2$ — фиксированная точка. Уравнение (1) моделирует акустические или электромагнитные колебания в среде $\mathbb{R}^3 = \{(x, x_3)\}$,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 24-21-00031).
© Кокурин М.Ю., Пахмутов Д.А., 2026

$x = (x_1, x_2)$, где свойства среды постоянны по направлению x_3 . Источник действует мгновенно в момент $t = 0$, расположен вдоль прямой $(x, x_3) = (z, x_3)$ с интенсивностью, независимой от x_3 . Обратная задача заключается в восстановлении коэффициента $c(x)$ по наблюдениям полей $u(x, t; z)$ для семейства источников $z \in Z$, где $Z \cap \overline{D} = \emptyset$. Среда однородна вне области $D \subset \mathbb{R}^2$ с связным дополнением: $c(x) \equiv c_0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ ($c_0 > 0$ известно), а $c(x)$ в D неизвестно. Наблюдения ведутся на кривой Y , $Y \cap \overline{D} = \emptyset$.

Как показано в [1], задача сводится к уравнению

$$\int_D \xi(x) \ln|x-y| \ln|x-z| dx = G(y, z), \quad (y, z) \in Y \times Z, \quad (2)$$

называемому двумерным уравнением М. М. Лаврентьева. Функция $G(y, z)$ определяется из наблюдений $u(y, t; z)$ при $t > 0$. Ключевой вопрос — условия на кривые Y и Z , при которых (2) имеет единственное решение, то есть однородное уравнение в классе кусочно-непрерывных ξ имеет только тривиальное решение $\xi \equiv 0$.

Требования простоты инженерных решений при создании томографических устройств приводят к постановкам, в которых Y, Z являются сегментами прямых или окружностей. В дополнение к результатам [1], [2] был рассмотрен случай, когда содержащие Y, Z прямые или окружности пересекают \overline{D} . Показывается, что в качестве Y, Z кроме прямых могут быть взяты и неограниченные кривые не пересекающие \overline{D} .

Определение 1. Множество $M \subset \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ называется множеством единственности для гармонических функций вне \overline{D} , если для любой $u(x)$, гармонической в Ω , и такой, что $|u(x)| \leq C(1 + \ln|x|)$, $x \in \Omega$, $|x| \geq R$ для некоторых $C, R > 0$, равенство $u(x) = 0$, $x \in M$ влечет $u(x) = 0$, $x \in \Omega$.

Теорема 1. Пусть Y, Z — замкнутые кривые класса C^2 , охватывающие множество \overline{D} . Тогда соответствующее (2) однородное уравнение имеет единственное решение $\xi \equiv 0$.

Теорема 2. Пусть одно из множеств Y, Z есть открытый сегмент в неограниченной части $\mathcal{L} \setminus \overline{D}$ произвольной прямой $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$, а второе — множество единственности в смысле определения 1. Тогда соответствующее (2) однородное уравнение имеет единственное решение $\xi \equiv 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда измерения проводятся не на кривых, а в двумерной области $Y = Z = \Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. При этом, полагая $y = z \in \Omega$, получаем пространственно непереоделенную

постановку обратной задачи. В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$\int_D \xi(x) \ln^2 |x - y| dx = G(y), \quad y \in \Omega. \quad (3)$$

Справедлива следующая теорема [3].

Теорема 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, где Ω — область в \mathbb{R}^2 . Тогда уравнение (3) имеет единственное решение $\xi(x) \equiv 0$ в D .

Литература

1. Кокурин М.Ю. О редукции нелинейной обратной задачи для гиперболического уравнения на плоскости к линейному интегральному уравнению / М.Ю. Кокурин // Выч. мет. программирование. — 2009. — Т. 10, № 3. — С. 300–305.
2. Рамм А.Г. Многомерные обратные задачи рассеяния / А.Г. Рамм — М.: Мир, 1994.
3. Кокурин М.Ю., Ключев В.В. Методы теории гармонических функций в обратных задачах волнового зондирования / М. Ю. Кокурин, В. В. Ключев — М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2025.

ЭКСТРЕМАЛИ ФРЕДГОЛЬМОВА ФУНКЦИОНАЛА С ОМБИЛИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

И.В. Колесникова (Воронеж, ВГУ)

kolinna@inbox.ru

1. К изучению поведения гладких функционалов вблизи угловых особых точек края банахова многообразия приходится обращаться как в пределах "чистой" теории особенностей гладких функционалов, так и в рамках задач прикладной направленности — теории управления, теории фазовых переходов, теории бифуркаций периодических волн и т.д. В этих теориях естественным образом возникают нелинейные вариационные задачи с полуограничениями

$$V(x) \longrightarrow \inf, \quad g_k(x) \geq 0, \quad x \in M, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

в которых $V(x)$, $g_k(x)$ — гладкие функционалы на гладких банаховых многообразиях. Такие задачи приводят к вопросу о бифуркациях экстремалей из угловой точки края банахова многообразия.

Перенос теории угловых особенностей на класс фредгольмовых функционалов был осуществлен Ю.И. Сапроновым посредством

применения модификаций вариационной версии метода Ляпунова–Шмидта [2]. Сравнительно недавно Ю.И. Сапроновым, А.В. Гнездиловым, О.Ю. Даниловой, О.В. Швыревой, М.А. Хуссаином, А.В. Белоглазовым и И.В. Колесниковой был проанализирован ряд важных угловых особенностей, связанных с приложениями к нелинейным задачам механики сплошных сред и математической физики [2], [4]. Выяснилось, что внешне различные нелинейные краевые задачи приводят в конечном итоге к одной и той же задаче — изучению ветвления критических точек параметрического семейства многочленов от переменных ξ_1, ξ_2 в положительной четверти координатной плоскости. Список примеров такого типа исследований постоянно растет.

2. Пусть гладкое семейство гладких функционалов $V(x, \lambda)$ задано при ограничениях на основной аргумент в виде двух неравенств, задающих неособо пересекающиеся гладкие поверхности и выделяющих 2–гранный угол: $C = \{x \in E \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, 2\}$ (случай ограничения в виде одного неравенства дает так называемую краевую особенность).

Точка $a \in C$ называется условно критической для $V(x, \lambda)$, если $\text{grad}_H V(a, \lambda)$ ортогонален грани C , содержащей a . Все критические точки a делятся на угловые ($g_1(a) = g_2(a) = 0$), краевые ($g_1(a)g_2(a) = 0, |g_1(a)| + |g_2(a)| \neq 0$) и внутренние ($g_1(x)g_2(x) \neq 0$). Множество всех угловых точек называется вершинной гранью угла или, более кратко, вершиной угла.

Анализ поведения $V(x, \lambda)$ можно провести, перейдя к функции $W(\xi) := \inf_{x:g(x)=\xi} V(x)$ — по какой-либо схеме конечномерной редукции [2]. Здесь $g(x) = (g_1, g_2, \dots, g_m)^\top$, $\{g_k\}$ — набор независимых гладких функционалов (ключевых параметров), включающий в себя пару ограничителей $\{g_1, g_2\}$, задающих угол.

Функционалы $g_i(x)$ подчинены, как правило, дополнительным "техническим" условиям: предполагается, что $\text{grad}_H g_i(x) \in F \forall x \in E$, предполагается, в каждом слое $g^{-1}(\xi)$ существует (вблизи нуля) единственная (морсовская) экстремаль $x = \varphi(\xi)$ и т.д. Подмногообразие \mathcal{N} , состоящее из точек $\varphi(\xi)$, называется редуцирующим. Ключевая функция представляет собой сужение функционала V на редуцирующее подмногообразие.

Таким образом, исследование V в угле C сводится к исследованию функции W в координатном угле $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$. Кратность $\hat{\mu}$ угловой критической точки $x_0 \in C$ определяется как размерность факторалгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]]/\mathfrak{A}(W, \alpha)$, где α — образ a в простран-

стве ключевых переменных, $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$ — алгебра формальных степенных рядов от $\xi - \alpha$, а $\widehat{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$ — угловой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный следующим набором функций (точнее, тейлоровскими разложениями этих функций): $\xi_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \xi_2 \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial \xi_m}$. Кратность $\bar{\mu}$ краевой критической точки a , принадлежащей краю $g_1(a) = 0$, определяется как размерность фактор-алгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]] / \widehat{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$, где $\widehat{\mathfrak{A}}(W, \alpha)$ — краевой якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный набором функций: $\xi_1 \frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial \xi_m}$. Аналогично определяется кратность особой точки на крае $g_2(a) = 0$. Кратность внутренней точки a определяется обычным образом [1], как размерность фактор-алгебры $Q(W, a) = \mathbb{R}[[\xi - \alpha]] / \mathfrak{A}(W, \alpha)$, где $\mathfrak{A}(W, \alpha)$ — якобиев идеал в $\mathbb{R}[[\xi - \alpha]]$, порожденный набором первых производных: $\frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial \xi_m}$.

Пусть $\hat{M} \in E \times \mathbb{R}^q$ — многообразие катастроф: $\hat{M} = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, где M_k определяется соотношениями $f(x, \lambda) = 0$, $x \in C_k$, $\dim \text{Ker} \frac{\partial [f]_k}{\partial x}(x, \lambda) > 0$. Здесь C_0 — вершинная грань угла, C_1 — край угла, C_2 — внутренность угла, а $[f]_k = \text{grad}_H \left(V \Big|_{C_k} \right)$.

Каустика Σ функционала в угловой особой точке определяется как образ многообразия катастроф относительно канонической проекции $\pi : E \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$: $\Sigma = \pi(\hat{M})$.

Если заранее известна оценка сверху числом d значений индексов Морса всех бифурцирующих экстремалей, то каждый расклад бифурцирующих экстремалей (*bif*-расклад) описывается матрицей $L = (l_k^j)$, в которой элемент l_k^j совпадает с количеством критических точек на C_k .

В случае угловой особенности ее версальная развертка определяется как функция $W(x, \lambda)$, для которой совокупность ростков функций $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ (начальных скоростей деформации) дает систему линейных образующих в угловом кольце особенности $\hat{Q}_0(W)$. Если эта совокупность является базисом $\hat{Q}_0(W)$, то деформация называется миниверсальной. Если рассмотреть в кольце ростков гладких функций максимальный идеал и профакторизовать его по угловому якобиеву идеалу, то получим усеченное угловое локальное кольцо $\hat{Q}_0^*(W)$. Деформация $W(x, \lambda)$, для которой $W(x, 0) = 0$ и совокупность ростков функций $\frac{\partial W}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ образует базис $\hat{Q}_0^*(W)$, называется ограниченной миниверсальной деформацией. Каустика такой деформации называется главной и обозначается Σ (чаще всего каустикой особенности называют главную каустикой).

3. Остановимся на случае симметричной функции W двух переменных, ее главная часть U имеет следующий вид: $\sigma_1^3 + \varepsilon \sigma_1^2 + \delta \sigma_1 + p \sigma_1 \sigma_2 + \gamma \sigma_2$, $\sigma_1 = x_1^2 + x_2^2$, $\sigma_2 = x_1^2 x_2^2$.

Если U — развертка min -особенности шестого порядка, то $p > -4$.

Через $\mathcal{L} = (l_0, l_1, l_2)$ обозначим bif -расклад W (количества минимумов, седел и максимумов).

Теорема 1. Если \mathcal{L} — bif -расклад для min -особенности шестого порядка, то на каждой из полуосей координат и на диагональных полуосях существует не более двух ненулевых критических точек. Если на одной из этих (восьми) полуосей имеется пара ненулевых критических точек, то эти точки разнотипны (с различными значениями индекса Морса). При этом $l_2 \leq 8$. В случае максимального расклада $l_0 \geq 5$ и $l_2 \geq 4$.

Теорема 2. Если \mathcal{L} — максимальный bif -расклад, то вне диагональных и координатных осей находятся лишь седловые критические точки (8 точек).

После замены $x_1^2 = y_1$, $x_2^2 = y_2$ получим омбилическую точку минимума в вершине угла $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$. Максимальные bif -расклады особенности в нуле функции W исчерпываются раскладами $(9, 12, 4)$, $(5, 12, 8)$.

В полярных координатах $x_1 = r \cos(\varphi)$, $x_2 = r \sin(\varphi)$ получим $\sigma_1 = r^2$, $\sigma_2 = \frac{r^4}{8}(1 - \cos(4\varphi))$ и, следовательно,

$$W = r^6 + \varepsilon r^4 + \delta r^2 + \frac{r^4}{8}(p r^2(1 - \cos(4\varphi)) + \gamma(1 - \cos(4\varphi))).$$

Множество критических точек является пересечением кривых M_1 и M_2 , определяемых уравнениями $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ (кривая радиально стационарных точек) и $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ (кривая тангенциально стационарных точек). Из выражения W следует, что M_1 задается уравнением, после приведения подобных слагаемых и сокращения на множитель r , уравнением

$$(6 + \frac{3p}{4}(1 - \cos(4\varphi)))r^4 + (4\varepsilon + 2\gamma(1 - \cos(4\varphi)))r^2 + 2\delta = 0.$$

Кривая M_2 задается уравнением $(p r^2 + \gamma) \sin(4\varphi) = 0$. Из последнего уравнения видно, что кривая M_2 состоит из координатных и диагональных прямых линий и окружности $r^2 = -\frac{\gamma}{p}$.

Каждому типу пересечения $M_1 \cap M_1$ соответствует определенный тип строения линий уровня ключевой функции и схема взаимных примыканий критических точек.

Аналогичный анализ можно осуществить и в случае несимметричных ключевых функций.

Литература

1. Арнольд В.И. Особенности дифференцируемых отображений. / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде // М.: МЦНМО. 2004. - 672 с.

2. Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // М.: МАИ. Т.12. 2004. С.3–140.

3. Колесникова И.В. Двухмодовые ветвления экстремалей гладких функционалов в точках минимума с однородными особенностями шестого порядка// Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – Саратов: СГУ, 2009. - Т.9, вып.2. — С.25-30.

4. Колесникова И.В. Ветвление фаз кристалла, определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка / И.В. Колесникова Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов // Системы управления и информационные технологии. – Москва-Воронеж, 2009. - № 1(35). — С. 72-76.

ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Корзюк, И.С. Козловская (Минск, БГУ)

kozlovskaja@bsu.by

В работе на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения, заданного в полуполосе, показывается, что решение или его производные терпят разрыв на определенном множестве характеристик внутри области задания уравнения, если отсутствуют полностью или частично однородные условия согласования в угловых точках на заданные функции граничных условий и правой части уравнения.

Постановка задачи.

В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ двух независимых переменных $x = (x_0, x_1) \in Q \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим волно-

вое уравнение

$$(\partial_{x_0}^2 - a^2 \partial_{x_1}^2) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{Q}, \quad (1)$$

где a^2, l – положительные действительные числа, $\partial_{x_0}^2 = \partial^2/\partial x_0^2$, $\partial_{x_1}^2 = \partial^2/\partial x_1^2$ – частные производные по x_0 и x_1 второго порядка. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \quad (2)$$

и граничные условия на других частях границы ∂Q

$$u(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad u(x_0, l) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \infty). \quad (3)$$

Здесь $f : \bar{Q} \ni \mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x})$ – заданная функция на \bar{Q} , $\varphi : [0, l] \ni x_1 \rightarrow \varphi(x_1) \in \mathbb{R}$, $\psi : [0, l] \ni x_1 \rightarrow \psi(x_1) \in \mathbb{R}$ – функции на $[0, l]$, $\mu^{(j)} : [0, \infty) \ni x_0 \rightarrow \mu^{(j)}(x_0) \in \mathbb{R}$ – заданные функции на $[0, \infty)$, гладкость которых будет уточнена ниже, $j = 1, 2$.

Функции $f, \varphi, \psi, \mu^{(j)}$, $j = 1, 2$, удовлетворяют следующим неоднородным условиям согласования:

$$\begin{aligned} \varphi(0) - \mu^{(1)}(0) &= \delta^{(1)}, \quad \frac{1}{a} \left(d\mu^{(1)}(0) - \psi(0) \right) = \delta^{(2)}, \\ \frac{1}{a^2} \left(a^2 d^2 \varphi(0) - d^2 \mu^{(1)}(0) + f(0, 0) \right) &= \delta^{(3)}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mu^{(2)}(0) - \varphi(l) &= \sigma^{(1)}, \quad \frac{1}{a} \left(d\mu^{(2)}(0) - \psi(l) \right) = \sigma^{(2)}, \\ \frac{1}{a^2} \left(d^2 \mu^{(2)}(0) - a^2 d^2 \varphi(l) - f(0, l) \right) &= \sigma^{(3)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $d\mu^{(j)}$ и $d^2\mu^{(j)}$ – производные функции $\mu^{(j)}$ первого и второго порядков, $j = 1, 2$, $d^2\varphi$ – производная второго порядка функции φ .

Для достаточно гладких заданных функций уравнения (1) на множестве \bar{Q} и условий (2), (3) на отрезке $[0, l]$ и полупрямой $[0, \infty)$ существует единственное классическое решение из $C^2(\bar{Q})$ этой задачи тогда и только тогда, когда условия согласования (4), (5) для этих функций являются однородными. В противном случае на определенных характеристиках в области Q решение u задачи (1) – (3) вместе с производными терпят разрывы. Эти разрывы можно записать в виде условий сопряжения.

Общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) + g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0), \quad (6)$$

где

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{2a} \int_0^{x_0} d\tau \int_{x_1 - a(x_0 - \tau)}^{x_1 + a(x_0 - \tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi, \quad (7)$$

$g^{(j)} \in C^2(D(g^{(j)}))$, $j = 1, 2$, если $u \in C^2(\bar{Q})$; $D(g^{(1)}) = (-\infty, l]$, $D(g^{(2)}) = [0, \infty)$, $\mathbf{x} \in \bar{Q}$.

Теорема 1. Если функции $\varphi \in C^2[0, l]$, $\psi \in C^1[0, l]$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$, $j = 1, 2$, то функция вида (6) является единственным классическим решением из класса $C^2(\bar{Q})$ задачи (1) – (3) тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (4), (5)

Теорема 2. Если для заданных функций $f, \varphi, \psi, \mu^{(j)}$ ($j = 1, 2$) не выполняются однородные условия согласования (4), (5), то, какими бы гладкими эти функции не были, задача (1) – (3) не имеет классического решения из $C^2(\bar{Q})$, определенного на $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$.

Теорема 3. Если заданные функции задачи (1) – (3) удовлетворяют неоднородным условиям согласования (4), (5), то решение задачи (1) – (3) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристиках $x_1 - ax_0 = -(k - 1)l$ и $x_1 + ax_0 = kl$, $k = 1, 2, \dots$

О ДИСКРЕТНОМ УРАВНЕНИИ ЭМДЕНА—ФАУЛЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗАРЯДНЫХ СТАНЦИЙ¹

Е.В. Коробко (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова,
РЭУ им. Г.В.Плеханова)
jakovi300195@yandex.ru

Исследуется дискретное дифференциальное уравнение второго порядка, являющееся естественным аналогом дифференциального уравнения типа Эмдена—Фаулера [3] следующего вида:

$$\Delta^2 u(k) \pm k^\alpha u^m(k) = 0, \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 25-11-00133).
© Коробко Е.В., 2026

где $u : \mathbb{N}(k_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{N}(k_0) := \{k_0, k_0 + 1, \dots\}$, а $\Delta u(k)$ — первая разность, определяемая следующим образом: $\Delta u(k) = u(k + 1) - u(k)$.

Частный случай данного уравнения

$$v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1} = k \cdot v_j^{-1}, \quad (2)$$

где $j = 1, 2, \dots$; $v_0 = 1$, $v_1 = 1 + k$, помогает описать процесс зарядки электромобилей с учетом их случайного прибытия, стохастического спроса на энергию на зарядных станциях и характеристик сети распределения электроэнергии. Моделируется процесс случайного прибытия электромобиля на зарядные станции с различными стохастическими потребностями в энергии, где зарядные станции классифицируются как серверы с физическими ограничениями распределительной сети. При ограничениях распределительных сетей требуется исследовать условия, гарантирующие стабильность массового обслуживания [3].

Для уравнения (2) доказываем «логарифмическое» поведение решения

Теорема 1. [4] Пусть V_j , $j = 0, 1, \dots$ и $W_j = j(2k \ln(j))^{1/2}$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V_j \cdot (W_j)^{-1} = 1.$$

Оценки степенного вида для решения уравнения (1):

Теорема 2. [2,6,7] Если существуют такие числа $\gamma \in (0, 1)$, s и $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, что при $P \equiv (\gamma + s + 1)(s + 1)^{-1}$ и $Q \equiv (\gamma + s + 2)(ms)^{-1}$ выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий

- 1) $ms > 0$, $s > -1$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 P$, $\varepsilon_4 < \varepsilon_2 P$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_4 Q$;
- 2) $ms < 0$, $s > -1$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 P$, $\varepsilon_4 < \varepsilon_2 P$, $\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_1 < -\varepsilon_4 Q$;
- 3) $ms < 0$, $-2 \neq s < -1$, $\varepsilon_4 < -\varepsilon_1 P$, $\varepsilon_3 < -\varepsilon_2 P$, $\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_1 < -\varepsilon_4 Q$;
- 4) $ms > 0$, $-2 \neq s < -1$, $\varepsilon_4 < -\varepsilon_1 P$, $\varepsilon_3 < -\varepsilon_2 P$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_4 Q$,

то для некоторого K при каждом $k_0 > K$ существует решение $u(k)$ уравнения (1), удовлетворяющее при всех $k \in \mathbb{N}(k_0)$ оценкам

$$-\varepsilon_1 k^{-\gamma} < (u(k) - ak^{-s} - bk^{-s-1}) \cdot b^{-1} k^{s+1} < \varepsilon_2 k^{-\gamma},$$

$$-\varepsilon_3 k^{-\gamma} < (\Delta u(k) - \Delta(ak^{-s}) - \Delta(bk^{-s-1})).$$

$$\cdot (\Delta(bk^{-s-1}))^{-1} < \varepsilon_4 k^{-\gamma},$$

$$-\varepsilon_1 k^{-\gamma} + O(k^{-1}) < (\Delta^2 u(k) - \Delta^2(ak^{-s}) - \Delta^2(bk^{-s-1})).$$

$$\cdot (\Delta^2(bk^{-s-1})ms(s+2)^{-1})^{-1} < \varepsilon_2 k^{-\gamma} + O(k^{-1}).$$

Литература

1. Astashova I. Existence of a solution of discrete Emden-Fowler equation caused by continuous equation / I .Astashova, J. Diblik, E. Korobko. — Discrete and Continous Dynamical Systems. Series S, — 2021. —V.14. —№12. С.4159–4178.
2. Emden R. Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf Kosmologie und Meteorologischen Probleme, Teubner / R.Emden.— Leipzig and Berlin, 1907.
3. Christianen H.,M. Asymptotic analysis of Emden—Fowler type equation with an application to power flow models./ H.M.Christianen, A.J.E.M.Janssen, M.Vlasiou, B.Zwart. — Indagationes Mathematicae, —2023. —no.34. —1146-1180
4. Christianen M.Comparison of stability regions for a line distribution network with stochastic load demands / M.Christianen, J.Cruise, A.Janssen, S.Shneer, M.Vlasiou, B.Zwart. —2021.
5. Diblik J. Asymptotic behavior of solutions of a second-order nonlinear discrete equation of Emden-Fowler type. / J. Diblik, E.Korobko. — Advances in Nonlinear Analysis. Walter de Gruyter GmbH& Co.KG. (Berlin, Germany), —2023. —V.12. —№1. —С.1-23.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕРОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ НА ПРИМЕРАХ УРАВНЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

М.В. Коровина, В.Ю. Смирнов (Москва, МГУ)

betelgeuser@yandex.ru

Одной из фундаментальных задач аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами является задача построения асимптотик их решений в окрестности иррегулярных особых точек. Эта задача была сформулирована Пуанкаре в работах [1], [2]. Основной целью данной работы является описание метода построения этих асимптотик.

Ранее задачу о построении асимптотик решений в окрестности бесконечности, рассматривал Томэ в работе [3], где он показал, что в частном случае асимптотики решений рассматриваемой задачи представимы в виде выражений, которые содержат формальные, вообще говоря, расходящиеся степенные ряды. В работах Пуанкаре было доказано, что полученные расходящиеся ряды являются асимптотическими рядами. Задача о построении асимптотик решений для дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности, которая была сформулирована Пуанкаре и которая является частным случаем общей проблемы, была решена в работах [4], [5]. В этих работах найден общий вид асимптотик решений для таких уравнений. Однако общая проблема, которая заключается в построении асимптотик решений дифференциальных уравнений в окрестности произвольной иррегулярной особой точки до сих пор не была решена. Именно решению этой задачи и посвящена данная работа. А именно рассмотрим уравнение

$$a_n(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \dots + a_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + \dots a_0(x) u(x) = 0, \quad (1)$$

где $a_i(x)$, $i = 0, \dots, n$ — мероморфные функции. Задача заключается в построении асимптотик решений уравнения (1) в окрестности особых точек (как регулярных, так и иррегулярных).

Без ограничения общности будем считать, что особой точкой уравнения (1) является $r = 0$. В работе [6] показано, что уравнение (1) может быть приведено к виду

$$H\left(r, -r^{k+1} \frac{d}{dr}\right) u = 0, \quad (2)$$

где

$$H\left(r, -r^{k+1} \frac{d}{dr}\right) = \left(-r^{k+1} \frac{d}{dr}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(r) \left(-r^{k+1} \frac{d}{dr}\right)^i.$$

Здесь $k = -1, 0, 1, 2, \dots$, Будем называть это k порядком вырождения оператора, а через $\tilde{a}_i(r)$ обозначены соответствующие голоморфные функции. В работе [6] найдено минимальное целое неотрицательное значение k , то есть минимальный порядок вырождения, и коэффициенты этого уравнения. Если в представлении (2) уравнения (1) минимальное $k = -1$, то по классификации особых точек,

введенной Пуанкаре, получим, что точка $r = 0$ не является особой, если $k = 0$, то особая точка $r = 0$ является регулярной особой точкой. Как известно, асимптотики решений в окрестности регулярных особых точек являются конормальными (см. например [7]), а именно имеют вид $\sum_j r^{s_j} \sum_{i=0}^k a_i^j \ln^i r$, где a_i^j , s_j — некоторые комплексные числа. (Подробно о конормальных асимптотиках и методах их построения можно прочитать в книге [10]).

Если $k \in \mathbb{N}$, то особая точка является иррегулярной, в этом случае запишем оператор (2) в виде

$$H\left(r, -r^{k+1} \frac{d}{dr}\right) = k^n \left(\left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(r) \frac{1}{k^{n-i}} \left(-\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^i \right).$$

Основным символом дифференциального оператора $H\left(r, -r^{k+1} \frac{d}{dr}\right)$ называется функция

$$H_0(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tilde{a}_i(0)}{k^{n-i}} p^i.$$

В случае, когда основной символ имеет только простые корни, асимптотики решений в окрестности особых точек были получены в работах [8], [9]. В этих работах построен общий вид асимптотик решений.

Для построения асимптотик решений дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами в окрестности их иррегулярных особых точек применяются методы ресургентного анализа, основой которых является преобразование Лапласа — Бореля, в том числе метод повторного квантования [11].

Для применения методов ресургентного анализа уравнение с мероморфными коэффициентами приводится к виду (2) и делается преобразование Лапласа — Бореля. Этот метод позволяет представить асимптотику решения в виде суммы асимптотических членов, каждый из которых соответствует одному из корней основного символа. Чтобы найти вид асимптотического члена, соответствующего корню основного символа p_i , можно передвинуть этот корень в ноль с помощью так называемой экспоненциальной подстановки $e^{\frac{p_i}{r}} u_i(r)$ и потом построить асимптотику, соответствующую нулевому корню основного символа. И тот же метод может быть последовательно применен для всех асимптотических членов, соответствующих всем

корням основного символа. К примеру, если корень p_0 является простым, то асимптотический член, соответствующий этому корню имеет вид

$$u_0(r) = \exp\left(\frac{p_0}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{k-i}^0}{r^{k-i}}\right) r^{\sigma_0} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^0 r^i. \quad (3)$$

Возникает вопрос о том какой вид имеет асимптотический член, соответствующий кратному корню. В этой работе мы покажем, что асимптотические члены, соответствующие нулевому корню основного символа, будут либо конормальными либо будут иметь вид

$$u_0(r) = \exp\left(P_0\left(r^{-\frac{1}{l_0}}\right)\right) r^{\sigma_0} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^0 r^{\frac{i}{l_0}}, \quad (4)$$

здесь $l_0 \in N$, σ_0 — некоторое комплексное число, $P_0(x)$ — полином, степень которого не превышает kl_0 , $\sum_{k=0}^{\infty} a_i^0 x^i$ — асимптотический ряд.

Натуральное число l_0 будем называть знаменателем асимптотического члена. Как следует из формулы (3) знаменатель асимптотического члена, соответствующего простому корню, равен 1.

В работе [6] показано, что асимптотический член для корня кратности два может иметь знаменатель 1 или 2. В данной работе будет сформулирован метод, который позволяет находить вид асимптотических членов, соответствующих кратным корням основного символа. Заметим, что этот метод позволяет найти вид асимптотического члена, в том числе найти его знаменатель.

Основные результаты

Наша задача состоит в построении асимптотик решений дифференциальных уравнений с голоморфными (мероморфными) коэффициентами в окрестности их особых точек и описании метода их построения в пространствах функций k -экспоненциального роста.

Опишем преобразования уравнения, которые использует метод.

1. Экспоненциальная подстановка $u(r) = e^{-\frac{b}{r^{B-1}}} u_1(r)$, которая сдвигает корень основного символа в ноль.

2. Преобразование младших членов.

Младшими членами в уравнении общего вида

$$\begin{aligned} & \left(-r^k \frac{d}{dr}\right)^n u + \sum_{i=0}^{n-m} a_i \left(-r^k \frac{d}{dr}\right)^{n-i} u + r \sum_{i=0}^{n-1} a_i^1 \left(-r^k \frac{d}{dr}\right)^i u + \\ & + r^2 \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \left(-r^k \frac{d}{dr}\right)^i u + \dots + r^{k-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{k-1} \left(-r^k \frac{d}{dr}\right)^i u + \\ & + r^k \sum_{i=0}^{n-1} a_i^k(r) \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i u = 0 \end{aligned}$$

называются члены уравнения вида $r^i \left(-r^k \frac{d}{dr}\right)^j$ при условии $\frac{i}{k-1} + j > m$. От младших членов не зависит вид асимптотики, от них зависят только значения коэффициентов асимптотического ряда в (4).

3. Преобразование, понижающее степень однородности уравнения.

Первое преобразование применяется для того, чтобы сдвинуть корень основного символа оператора в ноль. Второе преобразование применяется для уравнения с неоднородным основным символом, и путем отбрасывания младших членов, преобразует исходное уравнение к уравнению с однородным основным символом, при этом асимптотические члены соответствующие нулевому корню основного символа имеют тот же вид, что и соответствующие решения преобразованного уравнения. Третье преобразование применяется к уравнению с однородным основным символом. Оно понижает степень вырождения и, с учетом первого преобразования, кратность корня основного символа.

Суть метода состоит в том, что с помощью этих трех преобразований исходное уравнение преобразуется к уравнению с корнем основного символа меньшей кратности.

Теорема 1. *Любые асимптотики решений уравнения (1) со степенью вырождения m в пространстве функций $(m-1)$ -экспоненциального роста представимы в виде суммы линейных комбинаций асимптотических членов вида*

$$u_i(r) = \exp\left(P_i\left(r^{-\frac{1}{l_i}}\right)\right) r^{\sigma_i} \sum_{j=0}^{\infty} a_j^i r^j,$$

где $l_i \in N$, σ_i — некоторые комплексные числа, $P_i(x)$ — полином, степень которого не превышает $(m-1)l_i$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^i x^k$ — асимптотический ряд, и членов, соответствующих конормальным асимптотикам, вида

$$e^{\frac{p_i}{l_i}} \sum_{j=1}^m r^{\sigma_j} \ln^j r \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{i,j} r^k.$$

Каждый из асимптотических членов $u_i(r)$ соответствует корню основного символа p_i .

Литература

1. Poincare H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires / H. Poincare // Acta math. — 1886. — v. 8. — p. 295-344.

2. Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре / Анри Пуанкаре. — М. : Наука, 1974.
3. Thome L.W. Zur Theorie der linearen differentialgleichungen / L.W. Thome // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. — 1872.
4. Korovina M. Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point / M. Korovina // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 12.
5. Korovina M.V. Uniform Asymptotics of Solutions to Linear Differential Equations with Holomorphic Coefficients in the Neighborhood of an Infinitely / M.V. Korovina // Lobachevskii J. of Math. — 2023. — Vol. 44, no. 7. — P. 2765–2780.
6. Кац Д. С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов / Д.С. Кац // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1612–1617.
7. Kondrat'ev V. A. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points / V. A. Kondrat'ev // Trudy Moskov. Mat. Obshch. [Trans. Moscow Math. Soc.] — 1967. — Vol. 16. — P. 209–292.
8. Коровина М.В. Дифференциальные уравнения с вырождением и ресургентный анализ / М.В. Коровина, В.Е. Шаталов // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 9. — С. 1259–1277.
9. Korovina M.V. Asymptotics of solutions of equations with higher degenerations / M.V. Korovina // Differ. Equat. — 2012 — Vol. 48, 5 — P. 717–729.
10. Коровина М.В. Дифференциальные операторы на гладких многообразиях и многообразиях с особенностями / М.В. Коровина, И.Н. Смирнов: под научной редакцией В.Е. Шаталова. — М. : Проспект, 2025. — 208 с.
11. Korovina M.V. Repeated quantization method and its applications to the construction of asymptotics of solutions of equations with degeneration / M.V. Korovina // Differ. Equat. — 2016. — Vol. 52, — P. 58–75.

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ ТИПА ФОЙГТА С ПОСТОЯННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ¹

Е.И. Костенко, А.В. Звягин (Воронеж, ВГУ)
ekaterinarshina@mail.ru, zvyagin.a@mail.ru

В ограниченной области $Q_T = [0, T] \times \Omega$, где $T \geq 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 рассматривается задача:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu \Delta v - \\ & \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p \in \Psi(v); \\ & \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \\ & z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega; \\ & v(t, x) |_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad v(0) = v_0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Слабая разрешимость в пространстве $W_1 = \{v \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), \quad v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\}$ была доказана в статье [1]. В данной работе исследуется вопрос существования решения задачи управления с обратной связью (см. [2], [3]) для данной модели. Введем мультиотображение Ψ , удовлетворяющее условиям: ($\Psi 1$) Отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения; ($\Psi 2$) Отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно; ($\Psi 3$) Отображение Ψ глобально ограничено; ($\Psi 4$) Ψ — слабо замкнуто.

Определение 1. Пара функций $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$ называется слабым решением задачи управления с обратной связью, если она удовлетворяет а) начальному условию $v(0) = v_0$, б) условию обратной связи $f \in \Psi(v)$, в) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (0, T)$ тождеству

$$\langle v', \varphi \rangle - \int_\Omega \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx +$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-71-10026).
© Костенко Е.И., Звягин А.В., 2026

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \varepsilon(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle,$$

здесь z — РЛП, порожденный v .

Теорема 1. [см. [4],[5]] Пусть $v_0 \in V^0$, многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям $(\Psi 1)$ – $(\Psi 4)$. Тогда задача управления с обратной связью имеет слабое решение.

Введем множество $\Sigma \subset W_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$, состоящей из решений задачи управления с обратной связью. Введем $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольный функционал качества, удовлетворяющий условиям: $(\Phi 1)$ Существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geq \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$; $(\Phi 2)$ Если $v_m \rightarrow v_*$ в W_1 , $f_m \rightarrow f_*$ в $L_2(0, T; V^{-1})$, то $\Phi(v_*, f_*) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \Phi(v_m, f_m)$.

Теорема 2. [см. [4],[5]] Пусть выполнены все условия теоремы 1, пусть также функционал качества Φ удовлетворяет условиям $(\Phi 1)$ – $(\Phi 2)$. Тогда задача оптимального управления с обратной связью имеет слабое решение (v_*, f_*) , для которого выполнено $\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$.

Литература

1. Zvyagin A. Investigation of the weak solvability of one viscoelastic fractional Voigt model / A. Zvyagin, E. Kostenko // Mathematics. — 2023. — V. 11. — Article number 4472.
2. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье-Стокса / А.В. Звягин // ДАН. — 2019. — Т. 486, № 5. — С. 527–530.
3. Звягин А.В. Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 2. — С. 245–249.
4. Звягин А. В. О существовании управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта / А.В. Звягин, Е.И. Костенко // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1710–1714.
5. Zvyagin A.V. The problem of existence of feedback control for one nonlinear viscous fractional Voigt model / A.V. Zvyagin, E.I. Kostenko // Journal of Mathematical Sciences. — 2025. — Т. 292, № 1. — С. 64–73.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Д.С. Костерин (Ярославль, ЯрГУ им. П. Г. Демидова)
kosterin.dim@mail.ru

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t} = z - d_0 z |z|^2 + \nu d_1 \bar{z} \int_0^1 z^2(t, s) ds, \quad (1)$$

где $z = z(t, s) = z_1(t, s) + iz_2(t, s)$, $t \geq 0$, $x \in [0, 1]$, $d_0 = 1 - ic_0$, $d_1 = 1 + ic_1$, $c_0 > 0$, $c_1 \in \mathbb{R}^n$.

В работе исследуется динамика решений данного уравнения. Показано наличие некоторых периодических по t решений, исследуется их устойчивость. Методы исследования аналогичны методам, представленным в работах [1], [2], [3].

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Уравнение (1) имеет семейство периодических решений*

$$z = \frac{1}{\sqrt{1+\nu}} \exp\left(\frac{i(c_0 - \nu c_1)t}{1+\nu}\right).$$

Каждое из решений этого семейства экспоненциально орбитально устойчиво, если $\nu < 1$ и $c_0 c_1 > 1$.

Также справедлив следующий результат о периодических по s решениях.

Теорема 2. *Уравнение (1) имеет семейство решений вида*

$$z = \exp(ic_0 t + 2\pi i k x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

каждое из которых неустойчиво при нарушении условия

$$1 - c_0 c_1 + \nu(1 + c_1^2) > 0.$$

Литература

1. Кащенко С.А. Семейство кусочно-гладких решений одного класса пространственно-распределенных уравнений / С.А. Кащенко, Д.С. Костерин, С.Д. Глызин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2023. — Т. 69, № 2. — С. 263–275.

2. Glyzin S.D. Dynamic properties and construction of piecewise smooth periodic solutions of integro-differential equations / S.D. Glyzin, S.A. Kashchenko, D.. Kosterin // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2024. — vol. 27, no 1. — pp. 1–11.

3. Glyzin S.D. Dynamical Properties of Periodic Solutions of Integro-Differential Equations / S.D. Glyzin, S.A. Kashchenko, D.. Kosterin // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2025. — vol. 21, no 1. — pp. 49.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ В АЭРОДИНАМИКЕ

В.А. Костин, Д.В. Костин, М.Н. Силаева (Воронеж, ВГУ)
vlkostin@mail.ru, dvk605@mail.ru, marinanebolsina@yandex.ru

При $r > 1$, $\theta \in [0, l]$, $l \in [0, \infty)$, рассматривается уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial \theta^2} = r^2(r^2 - 1) \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial r^2} + r(1 - 2r^2) \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}, \quad (1)$$

описывающее, согласно [1], с.308, сверхзвуковой поток движения сжимаемой жидкости в применении к телам, ограниченным поверхностями, составляющими малый угол с направлением невозмущенного потока (тонкие крылья, удлиненные тела вращения).

Решается граничная задача Дирихле нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(r, 0) = \varphi(r), u(r, l) = \psi(r), \quad (2)$$

где функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ принадлежат пространству $C_{[1, \infty]}$ с нормой $\|\varphi\| = \sup_r |\varphi(r)|$.

Ставится вопрос о соотношении длины интервала $[0, l]$ с граничными условиями (2), при которых выполняется оценка на решение

$$|u(r, \theta)| \leq M(\|\varphi\| + \|\psi\|). \quad (3)$$

Ответ на этот вопрос дает следующее

Утверждение. *Если в (2) $\varphi(r) = \cos(\sigma \arccos \frac{1}{r})$, $\sigma \in [0, \infty)$, $\psi(r) = 0$, то при выполнении неравенств $0 \leq l < \frac{\pi}{\sigma}$ задача (1)-(2) имеет решение, удовлетворяющее неравенству (3) и оно представимо в виде*

$$u(r, \theta) = \frac{\sin \sigma(l - \theta)}{\sin \sigma l} \cos(\sigma \arccos \frac{1}{r}). \quad (4)$$

Следствие. Если $\sigma = n, n = 0, 1, \dots$, то при условии $0 \leq l < \frac{\pi}{n}$ решение (4) имеет вид

$$u(r, \theta) = \frac{\sin \pi(l - \theta)}{\sin \pi l} T_n\left(\frac{1}{r}\right),$$

где $T_n(z)$ – многочлены Чебышева 1-го рода.

Литература

1. Современное состояние аэродинамики больших скоростей // Под общ. редакцией Л. Хоуарта. изд. ин. лит. 1955. — 491 с.
2. Костин В.А. Операторная косинус - функция Чебышева и уравнения аэродинамики / В. А. Костин, Д. В. Костин, М. Н. Силаева // Насосы. Турбины. Системы. – Воронеж, 2022, № 2(43). — С. 65–70

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД И МЕРЫ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

А.В. Кузнецов (Москва, ИПУ РАН)

avkuz@bk.ru

Предложенные ранее вероятностные дизъюнктивные нормальные формы (ВДНФ) [1] представляют собой расширение классической ДНФ, в которой каждое вхождение переменной снабжено вещественным весом, определяющим вероятность появления данного литерала в реализации.

Рассмотрим систему из m переменных x_1, \dots, x_m . Вероятностной элементарной конъюнкцией назовём выражение $x_1^{\xi_1} \wedge \dots \wedge x_m^{\xi_m}$ с весами $\xi_i \in \mathbb{R}$. Для каждого $j = \overline{1, m}$ заданы три непрерывные функции $F_{-1}^j, F_0^j, F_1^j : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющие условию нормировки и интерпретируемые как вероятности того, что переменная $x_j^{\xi_j}$ реализуется как отрицание \bar{x}_j , отсутствие ε или переменная x_j соответственно. Полный набор данных функций задает отображение \mathbf{F} . ВДНФ есть дизъюнкция n таких конъюнкций: $\bigvee_{t=1}^n \bigwedge_{j=1}^m x_j^{\xi_{tj}}$.

Разобьём отрезок $[0, nm]$ на интервалы $\Delta_{tj} = [j - 1 + (t - 1)m, j + (t - 1)m]$. Поставим в соответствие ВДНФ функцию

$$Z_{\Xi}(x) = \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^m \xi_{tj} \mathbf{1}_{\Delta_{tj}}(x),$$

где $\Xi = (\xi_{tj})$ — матрица весов. Тогда вероятности реализации каждого литерала восстанавливаются как интегралы от Z_{Ξ} по соответствующим интервалам. Такое представление вкладывает пространство $\text{ВДНФ } \mathbf{B}_{\mathbf{F}}^m(n)$ в банахово пространство $L_1[0, nm]$ с нормой $\|Z\|_1 = \int_0^{nm} |Z| dx$. Вместо ступенчатой можно взять и любую другую интегрируемую функцию.

Предположим, что матрица весов Ξ сама является случайной с распределением P . Тогда кодировщик Z_{Ξ} становится случайным элементом в L_1 . Композиция с отображением \mathbf{F} порождает распределение вероятностей на множестве $\mathcal{V}(m, n)$ всех возможных ДНФ с фиксированным порядком дизъюнкций.

Такая структура сходна с *нечёткой логикой второго порядка* [2]. Первый уровень (отображение \mathbf{F}) задаёт нечёткую принадлежность литерала подобно нечеткому множеству первого типа. Второй уровень (случайность весов Ξ) делает эту принадлежность нечёткой, что соответствует вторичной функции принадлежности в моделях второго типа. Усреднение по второму уровню осуществляется с помощью интеграла Бохнера:

$$\bar{Z}(x) = \mathbb{E}[Z_{\Xi}(x)] = \int_{\mathbb{R}^{n \times m}} Z_{\Xi}(x) dP(\Xi),$$

что аналогично вычислению центроида для нечёткого множества второго типа [3].

Для кусочно-постоянного кодировщика Z_{Ξ} рассмотрим его обобщённый градиент (разность между значениями функции на соседних интервалах). Величина скачка $\Delta\xi$ показывает, насколько резко меняется вероятностная картина при переходе от одного момента времени к другому или от одной переменной к другой. Введем *энтропию градиента*:

$$H_{\nabla}(\Xi) = - \sum_k p_k \log p_k, \quad p_k \propto |\Delta\xi_k|^2.$$

Также введем полную *энтропию ВДНФ*:

$$H_{tot}(\Xi) = \sum_{t,j} \left(- \sum_{\ell \in \{-1, 0, 1\}} p_{tj}^{(\ell)} \ln p_{tj}^{(\ell)} \right),$$

где $p_{tj}^{(\ell)} = F_{\ell}^j(\xi_{tj})$ — вероятности трёх исходов. Эта величина служит глобальной скалярной характеристикой «размытости» логической формы. Классическая ДНФ даёт нулевую энтропию.

Литература

1. Kuznetsov A.V. On statement-valued random variables / A.V. Kuznetsov // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. — 2026. — Vol. 32, no. 8. — URL: <https://doi.org/10.1007/s40590-025-00840-7>
2. Mendel J.M. On clarifying some definitions and notations used for type-2 fuzzy sets / J.M. Mendel // Information Sciences. — 2016. — Vol. 340—341. — P. 337—345.
3. Karnik N.N., Mendel J.M. Centroid of a type-2 fuzzy set / N.N. Karnik, J.M. Mendel // Information Sciences. — 2001. — Vol. 132, Iss. 1—4. — P. 195—220.

СУЩЕСТВОВАНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ МАКРОЭКОНОМИКИ¹

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Д.Г. Фролов

(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)

kulikov_d_a@mail.ru

Рассматривается нелинейная краевая задача (КЗ)

$$w_{tt} + Bw_t + Aw = F_2(w) + F_3(w) + F_0(w), \quad (1)$$

$$w_x|_{x=0, x=\pi} = w_{xxx}|_{x=0, x=\pi} = w_y|_{y=0, y=\pi} = w_{yyy}|_{y=0, y=\pi} = 0. \quad (2)$$

В уравнении (1) использованы следующие обозначения:
 $w = w(t, x, y)$,

$$\Delta_\delta w = w_{xx} + \delta^2 w_{yy}, \quad Aw = \gamma(qd^2 \Delta_\delta^2 w + (1 - q)d\Delta_\delta w + w), \quad \delta \in \mathbb{R}_+,$$

$$Bw_t = (1 - \gamma)w_t - (1 + \gamma q)d\Delta_\delta w_t, \quad F_2(w) = F_{21}(w) + F_{22}(w),$$

$$F_{21}(w) = \gamma \left((1 - q)d^2(\Delta_\delta w)^2 + d(1 - q)w\Delta_\delta w - 2d^2q[w_x(\Delta_\delta w)_x + \right.$$

$$\left. + w_y(\Delta_\delta w)_y \right], \quad F_{22}(w) = (1 - \gamma)(ww_t - w_t^2) + d(1 + \gamma q - 2\gamma)w_t\Delta_\delta w +$$

$$+ 2\gamma qd(w_x w_{xt} + w_y w_{yt}), \quad F_3(w) = F_{31}(w) + F_{32}(w),$$

$$F_{31}(w) = \gamma \left(qd^2(\Delta_\delta w)^2 w + qd(\Delta_\delta w)w^2 + 2d^2q(w_x(\Delta_\delta w)_x + \right.$$

¹ Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2026-1331).

© Куликов А.Н., Куликов Д.А., Фролов Д.Г., 2026

$$w_y(\Delta_\delta w)_y)w),$$

$$F_{32}(w) = ww_t(w_t - w) - (1 + \gamma q)dw_t w \Delta_\delta w - 2\gamma qd(w_x w_{xt} + w_y w_{yt})w.$$

Наконец, нелинейный дифференциальный оператор $F_0(w)$ по совокупности переменных имеет порядок малости выше третьего. К КЗ (1),(2) могут быть сведены ряд вариантов системы Кейнса, в которой учтены пространственные факторы (напомним, что система дифференциальных уравнений Кейнса одна из наиболее известных математических моделей макроэкономики [1-3]).

КЗ (1),(2) имеет нулевое состояние равновесия. В докладе предполагается изложить результаты анализа некоторых бифуркационных задач, которые возникают при смене устойчивости нулевым решением КЗ (1),(2). При этом особый интерес представляют те варианты, когда бифурцирующие решения зависят от обоих пространственных переменных (т.е. от x и y).

В работе [3] было показано, что ответ об устойчивости нулевого состояния равновесия можно свести к анализу операторного пучка

$$P(\lambda, f) = \lambda^2 f + \lambda Bf + Af = 0,$$

где $f = f(x, y)$ удовлетворяет однородным условиям Неймана.

Пусть сначала $\gamma \in (0, 1)$. Тогда анализ операторного пучка $P(\lambda, f)$ показал, что, например, при

$$q = q_*(1 - \nu_0 \varepsilon), q_* = (\sqrt{2} - 1)^2, d = d_* = (\sqrt{2} + 1), \nu_0 = \pm 1$$

реализуется случай близкий к критическому двукратного нулевого корня и обобщенный вариант бифуркаций Тьюринга-Пригожина.

Иной круг бифуркационных задач возникает, если

$$\gamma = 1 + \nu_1 \varepsilon. \tag{3}$$

При таком выборе параметра γ у операторного пучка $P(\lambda, f)$ при $\varepsilon = 0$ существует пара собственных значений $\pm i$. В этом случае у КЗ (1),(2) при $\nu_1 = 1$ существует предельный пространственно однородный цикл. Если к выбору (3) добавить условия, при которых у линейного дифференциального оператора A будут существовать нулевые собственные значения, то возможно появление пространственно неоднородных циклов.

Например, при $\gamma = 1 + \nu_1 \varepsilon, q = q_*(1 + \nu_2 \varepsilon), d = d_*(1 + \nu_3 \varepsilon)$, где $q_* = (\sqrt{2} - 1)^2, d_* = \sqrt{2} + 1, \nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ реализуется

случай близкий к критическому пары простых чисто мнимых собственных значений и двукратного нулевого собственного значения операторного пучка $P(\lambda, f)$.

Литература

1. Keynes J.M. The general theory of employment, interest and money. New York / J.M. Keynes. — New York. : Harcourt, 1936. — 404 p.
2. Zhang W.B. Synergetic economics. Time and change in nonlinear economics / W.B. Zhang. — Berlin. : Springer-Verlag, 1991. — 246 p.
3. Куликов А.Н. Влияние пространственных факторов на динамику решений в модели Кейнса. Случай двух пространственных переменных. / А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Д.Г. Фролов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2026 (подана в печать).

К 200-ЛЕТИЮ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

О.В. Кунаковская, А.Р. Малютин, Д.А. Бухонов,

А.В. Морозов (Воронеж, ВГУ)

newovk@yandex.ru

В докладе будет предпринята попытка кратко изложить основные факты геометрии Лобачевского и описать ее влияние на последнее развитие научных представлений о реальном пространстве.

Исполнилось 200 лет со дня появления первого варианта неевклидовой геометрии — геометрии Лобачевского. 11 (23) февраля 1826 года на заседании научного общества Казанского университета Н.И. Лобачевский сделал доклад «Сжатое изложение начал геометрии». В 1829 году его работа «О началах геометрии» была опубликована в журнале «Казанский вестник» и представлена в Академию наук.

Н.И. Лобачевский (1792-1856) получил широкое естественно-научное образование, обучаясь в Казанском университете. Несомненно, этот факт, а также его настойчивый и деятельный характер сыграли свою роль в выборе им научной позиции при получении результатов исследования проблемы пятого постулата Евклида. Лобачевский взял на себя смелость оспорить традиционные представления о геометрии реального мира. Он активно старался привлечь внимание своих современников к новым полученным им результатам: свои работы на русском языке публиковал четыре раза, на французском

языке два раза и один раз — на немецком языке. Однако, при жизни он не получил публичной экспертной поддержки.

Тем не менее выяснилось, что тщательные и далеко продвинутые геометрические работы Н.И. Лобачевского были замечены К.Ф. Гауссом. По инициативе К.Ф. Гаусса в 1843 г. состоялось избрание Н.И. Лобачевского в члены-корреспонденты Геттингенского королевского научного общества. Он высоко отозвался о результатах, методах и стиле работ Н.И. Лобачевского (и, как выяснилось, даже выучил основы русского языка, чтобы иметь доступ к оригинальным текстам Н.И. Лобачевского). Цитата из письма К.Ф. Гаусса к астроному Г.Х. Шумахеру (1846): «Я собственно не нашел в сочинении Лобачевского ни одного нового для себя факта; но изложение весьма различно от того, какое я предполагал сделать, и автор трактует о предмете как знаток в истинно геометрическом духе.» В неопубликованных трудах Гаусса найдены результаты, подтверждающие его слова о том, что он тоже разрабатывал сходные идеи.

Венгерским математиком Яношем Бояи были независимо переоткрыты свойства геометрии Лобачевского (опубликовано в 1833 году; Бояи назвал новую математическую науку относительной геометрией). Первооткрывателями неевклидовой геометрии теперь признаны три математика: Н.И. Лобачевский, К.Ф. Гаусс, Я. Бояи.

Выдающийся вклад в пропаганду открытия Н.И. Лобачевского и восстановление памяти о нем внес математик, профессор Казанского университета Александр Васильевич Васильев. По его инициативе в 1893 году в Казани праздновалось столетие со дня рождения Н.И. Лобачевского (позже дата рождения Н.И. Лобачевского была уточнена).

Неевклидова геометрическая система Лобачевского повернула развитие геометрии по новому пути, стала точкой ветвления научного поиска. Уильям Клиффорд назвал Лобачевского «Коперником геометрии». Эта система нашла свои применения в современной технике, теории относительности, ядерной физике и высокотехнологичной медицине. Неевклидова интуиция стала широко распространенным явлением в интеллектуальной среде.

День рождения Н.И. Лобачевского — 1 декабря 1792 года. С 2024 года в честь нашего великого соотечественника 1 декабря отмечается День математика. Это официальный профессиональный праздник в Российской Федерации.

Литература

1. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений: [в 5 т.] / Н.И. Лобачевский; гл. ред. В.Ф. Каган; под общ. ред. В.Ф. Кагана, А.П. Котельникова, В.В. Степанова [и др.]. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946-1951.
2. Васильев А.В. Н. И. Лобачевский. Речь, произнесенная в торжественном собрании Имп. Казанского университета 22 октября 1893 г. / А.В. Васильев. – Казань, 1894. – 48с.
3. Васильев А.В. Николай Иванович Лобачевский / А.В. Васильев. – М.: Наука, 1992. – 222 с.
4. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. – Норден А.П. (ред.) – М.: ГИТТЛ, 1956. – 530 с.
5. Котельников А.П. Принцип относительности и геометрия Лобачевского // In memoriam Lobatschevskii: сб. ст. Т. 2. Казань, 1927. С. 37-66.
6. Геометрия Лобачевского и развитие ее идей. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. –Котельников А.П., Фок В.А., Каган В.Ф. (ред.) – Л.: ГИТТЛ, 1950. – 86 с.
7. Александров А.Д. Абстрактные пространства. – В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение. – Том 3, гл. XVII. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 93-181.
8. Ефимов Н.В. Высшая геометрия / Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1978. – 576 с.
9. Каган В.Ф. Лобачевский / В.Ф. Каган. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 507 с.
10. Каган В.Ф. Основания геометрии / В.Ф. Каган. – Ч. I: Геометрия Лобачевского и ее предыстория. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 492 с.; Ч. II: Интерпретация геометрии Лобачевского и развитие ее идей. – М.: Физматгиз, 1956. – 345 с.
11. Каган В.Ф. Лобачевский и его геометрия. Общедоступные очерки / В.Ф. Каган. – М.: Гостехиздат, 1955.
12. Николай Иванович Лобачевский (1793-1856): Сборник статей к 150-летию со дня рождения. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1943. – 88 с. <https://archive.org/details/nikolajivanovichlobachevskij1793185632/mode/2up>
13. Делоне Б.Н. Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского / Б.Н. Делоне. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1953. – 127 с.

14. Норден А.П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского / А.П. Норден. – М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
15. Широков П.А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского / П.А. Широков. – М.: Наука, 1983 (1955). – 80 с.
16. Николай Иванович Лобачевский. Сборник статей к столетию со дня смерти // Историко-математические исследования. – М.: ГИТТЛ, 1956. – № 9. – С. 9-402.
17. Нут Ю.Ю. Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении / Ю.Ю. Нут. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 311 с.
18. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства / Б.А. Розенфельд. – М.: Наука, 1969. – 548 с.
19. Трайнин Я.Л. Аналитическая геометрия на плоскости Лобачевского / Я.Л. Трайнин. – Новосибирск: Новосибирский гос. педагогический ин-т, 1971. – 341 с.
20. Трайнин Я.Л. Аналитическая геометрия в пространстве Лобачевского / Я.Л. Трайнин. – Новосибирск: Новосибирский гос. педагогический ин-т, 1974. – 285 с.
21. Бирман К.-Р. Об избрании Н.И. Лобачевского членом-корреспондентом Геттингенского научного общества // Историко-математические исследования. – Вып. 18. 1973. – С. 322-325.
22. Белл Э. Т. Творцы математики / Э.Т. Белл. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.
23. Дубровский В.Н. Релятивистский мир (Библиотечка «Квант», вып. 34) / В.Н. Дубровский, Я.А. Смородинский, Е.Л. Сурков. – М.: Наука, 1984. – 176 с.
24. Алексеевский Д.В. Геометрия пространств постоянной кривизны. В кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 29 (Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР) / Д.В. Алексеевский, Э.Б. Винберг, А.С. Солодовников. – М.: ВИНТИ, 1988. – С. 5-146.
25. Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. 1. Геометрия и классические поля. – М.: УРСС, 1996. – 224 с.
26. Егоров И.П. Геометрия / И.П. Егоров. – М. Просвещение, 1997. – 256 с.
27. Прасолов В.В. Геометрия Лобачевского / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2000. – 80 с.
28. Черников Н. А. К истории открытия Лобачевским неевклидовой геометрии / Н. А. Черников. – Письма в журнал «Физика элементарных частиц и атомного ядра». – 2002. – №3 (112) – С. 5-18.

29. Черников Н. А. Сто лет СТО / Н. А. Черников. – Письма в журнал «Физика элементарных частиц и атомного ядра». – 2006. – Т.3, №3 (132). – С. 7-23.

30. Сосов Е.Н. Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности / Е.Н. Сосов. – Казань: Казан. ун-т, 2016. – 84 с.

31. Вернер Л. Карл Фридрих Гаусс и русский язык // Математика и математическое образование: сборник трудов VIII Междунар. научной конф. «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию со дня рождения К.Ф. Гаусса), 26–29 апреля 2017 г., Россия, г. Тольятти. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017. – С. 16–21.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ИЗ КЛАССА $H_p^\alpha(G)$ ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОР – ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

В.М. Курбанов, Л.З. Буксаева (Азербайджанский
Государственный Педагогический Университет, Баку,
Азербайджан)

q.vali@yahoo.com, leylabuksayeva.80@yahoo.com

Рассмотрим на интервале $G = (0, \pi)$ одномерный оператор Дирака

$$Dy = By' + P(x)y, \quad y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T,$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & q(x) \end{pmatrix}$, $p(x)$ и $q(x)$ – вещественнозначные функции из класса $L_r(G)$, $r \geq 1$.

Следуя В.А. Ильину [1], под собственной вектор-функцией оператора D , отвечающей вещественному собственному значению λ , будем понимать любую тождественно не равную нулю двухкомпонентную вектор-функцию $y(x)$, которая абсолютно непрерывна на $\bar{G} = [0, \pi]$ и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $Dy = \lambda y$.

Пусть $L_p^2(G)$, $p \geq 1$, пространство двухкомпонентных вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \left(\|f\|_\infty = \sup_{x \in \bar{G}} |f(x)| \right).$$

Очевидно, что при $f(x) \in L_p^2(G)$, $g(x) \in L_q^2(G)$, $p^{-1}+q^{-1} = 1$, $p \geq 1$, существует «скалярное произведение»

$$(f, g) = \int_G \langle f(x), g(x) \rangle dx = \int_G \sum_{j=1}^2 f_j(x) \overline{g_j(x)} dx.$$

Через $H_p^\alpha(0, \pi)$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha \in (0, 1]$, обозначим класс двухкомпонентных вектор-функций $f(x) \in L_p^2(G)$ для которых $\omega_p(f, \delta) \leq M(f) \delta^\alpha$, где

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{\pi-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Норма вектора $f(x) \in H_p^\alpha(G)$ определяется формулой

$$\|f\|_p^\alpha \equiv \|f\|_{H_p^\alpha(G)} = \|f\|_p + \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_p(f, \delta)}{\delta^\alpha}.$$

Через $W_p^1(G)$, $p \geq 1$, обозначим пространство абсолютно непрерывных на \bar{G} двухкомпонентных вектор-функций $f(x)$, для которых $f'(x) \in L_p^2(G)$. Норма вектора $f(x) \in W_p^1(G)$, $p \geq 1$, определяется формулой $\|f\|_{W_p^1(G)} = \|f\|_p + \|f'\|_p$.

Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ полная ортонормированная в $L_2^2(G)$ система собственных вектор-функций оператора D и $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, $\lambda_n \in R$, соответствующая система собственных значений.

Введем частичную сумму спектрального разложения вектор-функции $f(x)$ по системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$:

$$\sigma_\nu(x, f) = (\sigma_\nu^1(x, f), \sigma_\nu^2(x, f))^T,$$

$$\sigma_\nu^j(x, f) = \sum_{|\lambda_n| \leq \nu} (f, u_n) u_n^j(x), \quad j = 1, 2; \nu > 0;$$

$$(u_n^1(x), u_n^2(x))^T = u_n(x), \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T.$$

Наряду с частичной суммой $\sigma_\nu^j(x, f)$ введем также модифицированную частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f_j(x)$, т.е.

$$S_\nu(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\sin v(x-y)}{x-y} f_j(y) dy, \quad j = 1, 2;$$

$$S_\nu(x, f) = (S_\nu(x, f_1), S_\nu(x, f_2))^T.$$

Введем обозначения

$$\Delta_\nu^j(f, K) = \|s_\nu^j(\cdot, f) - S_\nu(\cdot, f_j)\|_{C(K)},$$

$$\alpha_n(f) = \langle f, B u_n \rangle|_0^\pi = \left(f_1(x) \overline{u_n^2(x)} - f_2(x) \overline{u_n^1(x)} \right) \Big|_0^\pi.$$

Определение 1. Если на компакте $K \subset G$ разность $\Delta_\nu^j(f, K)$ стремится к нулю при $\nu \rightarrow +\infty$, то будем говорить, что j -я компонента спектрального разложения вектор-функции $f(x)$ по системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ равномерно сходится на компакте $K \subset G$ с разложением в тригонометрический ряд Фурье, соответствующий j -й компоненте $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$.

Главными результатами данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in H_p^\alpha(0, \pi)$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha \in (0, 1]$, коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ принадлежат классу $L_r(G)$, $r > 1$, и выполняется условие

$$\max \left\{ \frac{1}{r}, \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right\} < \alpha \leq 1.$$

Тогда j -ая компонента спектрального разложения вектор-функции $f(x)$ по системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ равномерно сходится на любом компакте $K \subset G$ с разложением в тригонометрический ряд Фурье, соответствующий j -ой компоненте $f_j(x)$, вектор-функции $f(x)$, и справедливы оценки:

$$\text{I. } \Delta_\nu^j(f, K) \leq C_1(K) \|f\|_p^\alpha \begin{cases} \nu^{\frac{1}{r}-1} \ln \nu & \text{при } \alpha = 1, \\ \nu^{\frac{1}{r}-\alpha} & \text{при } \max \left\{ \frac{1}{r}, \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right\} < \alpha < 1 \end{cases} \quad (1)$$

если $1 < r < \infty$;

$$\text{II. } \Delta_\nu^j(f, K) \leq C_2(K) \|f\|_p^\alpha \nu^{-\alpha} \ln^2 \nu \text{ при } \max \left\{ 0, \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right\} < \alpha \leq 1, \quad (2)$$

если $r = \infty$,

где $C_1(K)$, $C_2(K)$ положительные постоянные, $\nu \geq 2$.

Следствие 1. Пусть $f(x) \in W_1^1(G)$, коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ принадлежат классу $L_r(G)$, $r > 1$. Тогда справедлива следующая оценка

$$\Delta_\nu^j(f, K) \leq C_3(K) \|f\|_{W_1^1(G)} \begin{cases} \nu^{1/r-1} \ln \nu & \text{при } r \in (1, \infty), \\ \nu^{-1} \ln^2 \nu & \text{при } r = \infty, \end{cases} \quad (3)$$

где $C_3(K)$ положительная постоянная, $\nu \geq 2$.

Теорема 2. Пусть для вектор-функции $f(x) \in W_p^1(G)$, $p > 1$, и системы $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ выполняется условие $\alpha_n(f) = 0$, $n = 1, 2, \dots$ и коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ принадлежат в $L_r(G)$, $r > 1$. Тогда справедлива оценка

$$\Delta_\nu^j(f, K) \leq C_4(K) \|f\|_{W_p^1(G)} \begin{cases} \nu^{1/r-1} & \text{при } r \in (1, \infty), \\ \nu^{-1} \ln \nu & \text{при } r = \infty, \end{cases} \quad (4)$$

где $C_4(K)$ положительная постоянная, $\nu \geq 2$.

Литература

1. Ильин В.А. Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор – функциям оператора Шредингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы / В.А. Ильин // Дифференц.уравнения, 1991. Т.27, №11, С.1862-1879.

2. Курбанов В.М. Покомпонентная равномерная равносходимость разложений по корневым вектор-функциям оператора Дирака с тригонометрическим разложениям / В.М. Курбанов, А.И. Исмаилова // Дифференциальные уравнения 2012. Т. 48, №5, С.648-662.

НАХОЖДЕНИЕ МНОЖЕСТВА ВСЕХ АВТОМОРФИЗМОВ ГРУППЫ ЛИ КАК РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.А. Кыров (Горно-Алтайск, ГАГУ)

kyrov VA@yandex.ru

Диффеоморфизм $f : G \rightarrow G$ группы Ли G является автоморфизмом, если выполняется тождество [1]:

$$f(x \circ y) = f(x) \circ f(y), \quad (1)$$

для любых x и y из G .

Рассмотрим группу Ли, точки которой $(\xi, \eta, \mu, \nu) \in G$ представляются матрицами $\begin{pmatrix} \xi & 0 & \mu \\ \eta & \xi & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Бинарная операция: $(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1) \circ (\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) = (\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1)$. Единицей является элемент $e = (1, 0, 0, 0)$.

Автоморфизм в группе Ли G задается дифференцируемыми функциями $f : (\xi, \eta, \mu, \nu) \mapsto (\sigma_1(\xi, \eta, \mu, \nu), \sigma_2(\xi, \eta, \mu, \nu), \sigma_3(\xi, \eta, \mu, \nu), \sigma_4(\xi, \eta, \mu, \nu))$, удовлетворяющими условию (1). Из (1) вытекает, что для нахождения явного вида автоморфизма требуется решить систему функциональных уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_1(\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) &= \\ &= \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_1(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2); \\ \sigma_2(\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) &= \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_2(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_1(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2); \\ \sigma_3(\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) &= \\ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_3(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_3(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1); \\ \sigma_4(\xi_1\xi_2, \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \mu_2\xi_1 + \mu_1, \mu_2\eta_1 + \nu_2\xi_1 + \nu_1) &= \\ &= \sigma_2(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_3(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \\ &+ \sigma_1(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1)\sigma_4(\xi_2, \eta_2, \mu_2, \nu_2) + \sigma_4(\xi_1, \eta_1, \mu_1, \nu_1), \end{aligned}$$

причем $\Delta = \frac{\partial(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)}{\partial(\xi, \eta, \mu, \nu)} \neq 0$.

Теорема. Автоморфизм f группы Ли G имеет следующий явный общий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \xi, \quad \sigma_2 = a_{22}\eta, \quad \sigma_3 = a_{33}\mu + a_{31}\xi - a_{31}, \\ \sigma_4 &= a_{43}\mu + a_{22}a_{33}\nu + a_{31}\eta + a_{41}\xi - a_{41}, \end{aligned}$$

причем $a_{22}, a_{33}, a_{31}, a_{41}, a_{43} = \text{const}, a_{22}a_{33} \neq 0$.

Следствие. Множество выше найденных автоморфизмов содержит внутренние автоморфизмы:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \xi, \quad \sigma_2 = \eta, \quad \sigma_3 = a_{33}\mu + a_{31}\xi - a_{31}, \\ \sigma_4 &= a_{43}\mu + a_{33}\nu + a_{31}\eta + a_{41}\xi - a_{41}. \end{aligned}$$

Литература

1. Постников М.М. Группы и Алгебры Ли / М.М. Постников. — М. : Наука, 1982. — 447 с.

**РЕШЕНИЕ ВИДА ДВИЖУЩЕГОСЯ ФРОНТА
НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ДИФФУЗИИ С ИСТОЧНИКАМИ РАЗЛИЧНОГО ТИПА
ПО РАЗНЫЕ СТОРОНЫ ФРОНТА¹**

Н.Т. Левашова (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
levashovant@my.msu.ru

В работе рассматривается начально-краевая задача для уравнения диффузии с модульной нелинейностью. Эта задача была выделена как упрощенная постановка модели роста опухолевой ткани, представленной в [1]. В настоящей работе она была редуцирована до одного уравнения в одномерном случае. Постановка задачи имеет вид

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \begin{cases} -u + u_{max}, & u \geq u_{thr}, \\ uG(x, t), & u < u_{thr}, \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_{init}(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $G(x, t) > 0$, u_{max} и u_{thr} — известные величины, $0 < u_{thr} < u_{max}$, u_{init} — непрерывная функция, имеющая форму фронта, убывающего от значений u_{max} до нуля.

Объектом исследования настоящей работы является решение $u(x, t)$ вида движущегося фронта поставленной задачи, принадлежащее классу.

$$C([0, 1] \times [0, T]) \cap C^{1,0}((0, 1) \times [0, T]) \cap C^{2,0}(((0, \hat{x}) \cup (\hat{x}, 1)) \times [0, T]).$$

Фронт формируется в окрестности точки $\hat{x}(t)$, которая определяется из условия $u(\hat{x}, t) = u_{thr}$.

Физический смысл входящих в уравнение величин следующий: $u(x, t)$ — плотность опухолевых клеток, нормированная на единицу; $u_{max} = 1$, u_{thr} — плотность клеток в пролиферативном слое («пролиферация» означает деление клеток), $G(x, t)$ — концентрация кислорода вне опухоли. Коэффициент диффузии является малым параметром, поскольку отнормирован на количество клеток в одном миллилитре.

¹ Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

© Левашова Н.Т., 2026

Внутри опухоли выполняется условие $u \geq u_{thr}$. Функция $-u + u_{max}$ в правой части уравнения моделирует источник, который поддерживает в этой области пространства постоянный уровень плотности клеток u_{max} . Точка покоя $u = u_{max}$ является положением равновесия типа седла для уравнения (1) при $u \geq u_{thr}$.

Слагаемое $uG(x, t)$ описывает источник новых клеток в пролиферативном слое. Скорость деления клеток пропорциональна концентрации кислорода в области вне опухоли. Уравнение (1) при $u < u_{thr}$ имеет точку покоя $u = 0$ типа устойчивого узла или устойчивого фокуса в зависимости от соотношения параметров u_{thr} и $G(\hat{x}(t), t)$.

В работе получены условия, при которых точка покоя $u = 0$ в области $u < u_{thr}$ будет иметь тип узла или фокуса. В каждом случае доказана теорема существования решения вида фронта. Для доказательства применялся асимптотический метод дифференциальных неравенств [2].

Литература

1. Левашова Н.Т. Нелинейность модульного типа в моделировании роста опухолевого сфероида / Н.Т. Левашова, Е.А. Генералов, А.Э. Сидорова, А.Н. Гольцов // Теоретическая и математическая физика. — 2025. — Т. 224, № 1. — С. 118–128.
2. Нефедов Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение / Н.Н. Нефедов // Ж. вычислит. мат. мат. физ. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2074–2094.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова (Москва,
МГУ им. М.В. Ломоносова; Самара, СамГТУ)
vladlitvinov@rambler.ru

The problem under consideration, concerning the vibrations of objects with moving boundaries, is a non-classical version of a hyperbolic boundary value problem. To simplify its solution and justify the choice of an appropriate solution type, equivalent integro-differential equations were constructed, characterized by symmetric non-stationary kernels and variable integration limits. The value of the integro-differential equation method is particularly noticeable when moving to more complex

dynamic systems involving concentrated masses oscillating under the influence of moving loads. The proposed approach is generalized to a wide range of model boundary value problems, taking into account bending stiffness, environmental resistance, and foundation elasticity. The solution is obtained in dimensionless form with an accuracy of up to second-order smallness with respect to the parameters describing the boundary velocity. As a result, an approximate answer is found for the problem of transverse vibrations of a viscoelastic beam with bending stiffness and damping.

Литература

1. Litvinov V.L. On an inverse method for solving problems of oscillations of mechanical systems with moving boundaries, / V.L. Litvinov, K.V. Litvinova // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics — 2024 — No. 3, — P. 53–59.

**РАЗРАБОТКА ДИАГНОСТИЧЕСКИХ
ИНСТРУМЕНТОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ СПОСОБНОСТИ
БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
ЭФФЕКТИВНО ПРЕПОДАВАТЬ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
СТАРШЕКЛАСНИКАМ В ДОПОБРАЗОВАНИИ**

Н.И. Лобанова, В.Д. Селютин

(Зеленокумск, ЦВР, Орёл, ОГУ)

lobantchik@yandex.ru, selutin_v_d@mail.ru

Система дополнительного образования, в отличие от школьной программы, часто ориентирована на более глубокое погружение в предмет, работу с мотивированными учащимися и подготовку к олимпиадам или поступлению в вузы. Это накладывает особые требования на учителя: он должен быть способен не просто изложить материал, но и вдохновить, развить исследовательский интерес, научить применять знания в нестандартных ситуациях. Преподавание дифференциальных уравнений в таком контексте требует от учителя не только владения методами решения, но и умения показать их красоту, связь с реальным миром и потенциал для дальнейшего изучения [1]. Разработка диагностических инструментов должна быть многогранной и охватывать все необходимые компетенции. 1. Тестирование теоретических знаний: Формат: Тесты с выбором ответа, задания на установление соответствия, задачи с кратким ответом,

требующие применения формул и методов. Содержание: Вопросы, охватывающие основные понятия, классификацию уравнений, методы решения (разделение переменных, линейные уравнения первого порядка, уравнения высших порядков, системы уравнений, численные методы). 2. Оценка педагогического знания предмета (РСК): Формат: Ситуационные задачи, анализ педагогических сценариев, разработка планов уроков, ответы на вопросы о типичных заблуждениях учащихся. Содержание: Задания, требующие от будущего учителя продемонстрировать понимание того, как учащиеся воспринимают материал, какие трудности они испытывают, и как эти трудности можно преодолеть. Пример: «Учащиеся испытывают трудности с пониманием того, почему решение дифференциального уравнения представляет собой семейство функций, а не одну конкретную функцию. Предложите способ объяснения этой концепции, используя наглядные примеры». 3. Оценка навыков моделирования и применения: Формат: Задачи на составление дифференциальных уравнений по описанию реальной ситуации, задачи на интерпретацию решений, разработка моделей [1]. Содержание: Задания, где будущий учитель должен продемонстрировать умение переводить реальные проблемы на язык математики и наоборот – интерпретировать математические решения в контексте реального мира. Пример [1]: «Опишите дифференциальное уравнение, которое моделирует процесс охлаждения объекта по закону Ньютона, и объясните, как параметры этого уравнения связаны с физическими свойствами объекта и окружающей среды». или «Дано дифференциальное уравнение, описывающее рост популяции с учетом ограниченных ресурсов. Интерпретируйте смысл каждого члена уравнения и предскажите долгосрочное поведение популяции». 4. Оценка умения дифференцировать обучение: Формат: Разработка дифференцированных заданий для учащихся с разным уровнем подготовки, предложение стратегий поддержки отстающих и стимулирования одаренных учеников. Содержание: Задания, проверяющие способность учителя адаптировать сложность материала, предлагать альтернативные пути решения и создавать условия для успешного обучения каждого ученика. Пример: «Разработайте три варианта практического задания по теме «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка» для учащихся с разным уровнем подготовки: базовый, продвинутый и олимпиадный». 5. Оценка использования технологий: Формат: Практические задания на использование математических пакетов для решения и визуализации дифференциальных уравнений, анализ эф-

фективности применения технологий в обучении. Содержание: Проверка навыков работы с программным обеспечением, понимания его возможностей и ограничений, а также умения интегрировать технологии в учебный процесс для повышения его наглядности и эффективности. Пример: «Используя программное обеспечение, найдите численное решение начальной задачи Коши $y' = y - x$, $y(0) = 1$ на интервале $[0, 2]$ и постройте график решения. Объясните, как полученный график помогает понять поведение решения». 6. Оценка развития критического мышления и исследовательских навыков: Формат: Задачи, требующие анализа неполной информации, формулирования гипотез, проведения мини-исследований, оценки достоверности результатов. Содержание: Проверка способности будущего учителя не только передавать знания, но и формировать у учащихся умение самостоятельно мыслить, ставить вопросы и искать ответы. Пример: «Представьте, что вы столкнулись с дифференциальным уравнением, для которого не существует известного аналитического метода решения. Опишите, какие шаги вы предпримете для исследования его свойств и получения приближенного решения. Какие вопросы вы бы задали учащимся, чтобы стимулировать их исследовательскую активность»? 7. Наблюдение за практической деятельностью (при наличии возможности): Формат: Анализ видеозаписей уроков, наблюдение за проведением мастер-классов, оценка обратной связи от учащихся. Содержание: Оценка реального применения теоретических знаний и педагогических навыков в условиях учебного процесса. Разработка комплексных диагностических инструментов для оценки способности будущих учителей математики эффективно преподавать дифференциальные уравнения в системе дополнительного образования является многоэтапным и трудоемким процессом [1]. Однако, инвестиции в этот процесс окупятся повышением качества подготовки педагогических кадров, что, в свою очередь, приведет к более глубокому и осмысленному изучению дифференциальных уравнений учащимися. Эти инструменты позволят не только выявить сильные и слабые стороны будущих учителей, но и станут основой для разработки адресных программ повышения квалификации, направленных на формирование необходимых компетенций. В конечном итоге, это будет способствовать развитию математического образования и подготовке нового поколения специалистов, способных применять математические знания для решения актуальных задач.

Литература

1. Селютин В.Д. Разработка оценочных заданий для диагностики готовности будущих учителей / В.Д. Селютин, Т.К. Авдеева, Н.И. Лобанова, Н.Н. Яремко // Ученые записки Орловского государственного университета, 2025. — № 4 (109). — С. 355–360

О СПЕКТРАХ ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ¹

Н.А. Лобода, А.Х. Сташ (Майкоп, АГУ)
n-loboda@yandex.ru, aidamir.stash@gmail.com

Определения показателей колеблемости и блуждаемости вектор-функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^n)$ даны в работе [1] И. Н. Сергеева. Под спектром показателя дифференциальной системы будем понимать множество различных его значений на множестве всех ненулевых решений, а значение показателя назовем существенными, если оно принимается на решениях, множество начальных значений которых имеет положительную меру Лебега (см. [2, 3]).

Возможные спектры показателей блуждаемости линейных однородных двумерных дифференциальных систем изучались в работах [2, 3]. Оказалось, что эти результаты переносятся и на показатели колеблемости, как показывают следующие две теоремы.

Теорема 1 [4]. *Для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, существует двумерная линейная однородная дифференциальная система, у которой каждый из спектров всех показателей колеблемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны.*

Теорема 2 [5]. *Для любого замкнутого ограниченного счетного множества положительных попарно соизмеримых чисел с единственной нулевой предельной точкой, существует двумерная линейная однородная дифференциальная система, у которой каждый из спектров всех показателей колеблемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны.*

Возможность изменения мощностей спектров показателей колеблемости при переходе от нелинейной системы (все решения которой бесконечно продолжимы вправо) к системе ее первого приближения

¹ Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 075-03-2026-395).

© Лобода Н.А., Сташ А.Х., 2026

была установлена в работах [6, 7]. Оказалось, что эти свойства можно обобщить на показатели блуждаемости.

Теорема 3 [8, 9]. *Мощность спектра каждого показателя блуждаемости линейной двумерной системы может измениться при нелинейных возмущениях сколь угодно высокого порядка малости в окрестности начала координат.*

Литература

1. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Известия РАН. Серия математическая. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172.
2. Шишлянников Е.М. Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости / Е.М. Шишлянников // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем. Механ. — 2017. — № 5. — С. 14–21.
3. Шишлянников Е.М. Примеры дифференциальных систем с различными спектрами показателя блуждаемости / Е.М. Шишлянников // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1586–1587.
4. Сташ А.Х. О реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем / А.Х. Сташ, Н.А. Лобода // Дифференциальные уравнения. — 2024. — Т. 60, № 4. — С. 500–507.
5. Сташ А.Х. О реализации счетных существенных спектров показателей колеблемости линейной однородной двумерной дифференциальной системы / А.Х. Сташ, Н.А. Лобода // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2025. — Т. 31, № 1. — С. 199–209.
6. Сташ А.Х. Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения / А.Х. Сташ // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1139–1142.
7. Сташ А.Х. О спектрах показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы ее первого приближения / А.Х. Сташ // Дифференц. уравнения. — 2025. — Т. 61, № 2. — С. 207–220.
8. Лобода Н.А. Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной двумерной системы и системы первого приближения / Н.А. Лобода // Вестник российских университетов. Математика. — 2024. — Т. 29, № 146. — С. 176–187.
9. Сташ А.Х. Об изменении мощности спектра точного и абсолютного показателя блуждаемости при переходе от двумерной нелинейной системы к системе ее первого приближения / А.Х. Сташ,

**СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСКОРОСТНОГО
НЕОДНОРОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО
УРАВНЕНИЯ С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ
КОСЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА КОНЦАХ СТРУНЫ**

Ф.Е. Ломовцев (Минск, БГУ)

lomovcev@bsu.by

Новыми методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны [1], методом корректировки пробных решений в классические решения неоднородного модельного волнового уравнения с двумя переменными скоростями [2] и методом неявных характеристик [3] выведены явные формулы классических решений, необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования правой части уравнения (1), начальных (2) и граничных (3) данных следующей смешанной задачи для ограниченной струны. В верхней полуполосе плоскости $G = [0, d] \times [0, +\infty[$ доказана **глобальная теорема корректности** смешанной задачи:

$$u_{tt}(x, t) + (a_1(x, t) - a_2(x, t)) u_{tx}(x, t) - a_1(x, t) a_2(x, t) u_{xx}(x, t) - a_2^{-1}(x, t) (a_2)_t(x, t) u_t(x, t) - a_1(x, t) (a_2)_x(x, t) u_x(x, t) = f(x, t),$$

$$\{x, t\} \in \dot{G} =]0, d[\times]0, +\infty[, \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq d, \quad (2)$$

$$[\alpha_i(t) u_t(x, t) + \beta_i(t) u_x(x, t) + \gamma_i(t) u(x, t)]|_{x=\hat{d}_i} = \mu_i(t),$$

$$t \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь $a_1, a_2, f, \varphi, \psi, \mu$ – заданные вещественные функции своих переменных x, t на полуполосе G , $(-1)^{i+1} a_i(\hat{d}_i, t) \alpha_i(t) \neq \beta_i(t)$, $t \geq 0$, – нехарактеристические косые производные, $\hat{d}_i = (i - 1)d$, $i = 1, 2$.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз ограниченных непрерывно дифференцируемых функций на подмножествах Ω плоскости R^2 с топологией ограниченной и равномерной сходимости и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Определение. *Классическими решениями* смешанной задачи (1)–(3) на верхней полуполосе плоскости G называются функции $u \in C^2(G)$ с ограниченными и непрерывными частными производными

до второго порядка включительно на множестве $G = [0, d] \times [0, +\infty[$, которые в обычном смысле поточечно удовлетворяют уравнению (1) во внутренних точках из $\dot{G} =]0, d[\times]0, +\infty[$, начальным (2) и граничным (3) условиям в граничных точках из $G - \dot{G}$.

Справедливость выведенных формул классических решений смешанной задачи (1)–(3) **теоремы** подтверждена перепроверкой и исчислением Wolfram Mathematica на персональных компьютерах.

Следствие 1. Если правая часть f уравнения (1) зависит только от x или t и непрерывна по x или t , то эта **теорема** верна без соответствующих интегральных требований гладкости.

Следствие 2. В интегральных требованиях гладкости **теоремы** принадлежность интегралов пространствам $C^1(\Omega_k)$, где Ω_k равны множествам G_k , $\Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k-1}$ или $\Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k}$, эквивалентна их принадлежности множествам $C^{(1,0)}(\Omega_k)$ или $C^{(0,1)}(\Omega_k)$, где $C^{(1,0)}(\Omega_k)$ и $C^{(0,1)}(\Omega_k)$ – множества непрерывно дифференцируемых по x или t и непрерывных по t или x функций на Ω_k .

Замечание. В случае однородного телеграфного уравнения (1) с правой частью $f = 0$ явные формулы единственных и устойчивых по φ , ψ , μ_1 , μ_2 (в смысле Адамара) классических решений с критерием корректности смешанной задачи (1)–(3) найдены в [4].

Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. / Ф.Е. Ломовцев // Междунар. математ. конфер. «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (7-10 декабря 2015г., Минск, БГУ), в 2 ч. – Минск: ИМ НАН Беларуси. – 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.
2. Ломовцев Ф.Е. Метод корректировки пробных в классические решения модельного волнового уравнения с переменными скоростями $a_1(x, t)$ и $a_2(x, t)$ в первой четверти плоскости. / Ф.Е. Ломовцев // Вестник ФФИ. – 2023. – № 4. – С. 53–83.
3. Ломовцев Ф.Е. Метод неявных характеристик в смешанной задаче для двухскоростного модельного телеграфного уравнения с нехарактеристической первой косою производной граничного режима. / Ф.Е. Ломовцев // Мат. Межд. конф. ВВМШ (30 апреля-4 мая 2025г., ВГУ). – Воронеж: Изд. дом ВГУ. – 2025. – С. 216–220.
4. Fedor E. Lomovtsev. Global Correctness Theorem to the Mixed Problem for a Homogeneous Two-Velocity Model Telegraph Equation with Non-Characteristic Time-Dependent Oblique Derivatives at the Ends of a String. / F.E. Lomovtsev // WSEAS Transactions on Communications. – 2025. – Vol. 24. – pp. 31–43.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОШИБОК ДЛЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

О.Ю. Лопухинский (Воронеж, ВГУ)

lopukhinskiy.business@mail.ru

Функция ошибок $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ широко применяется в теории вероятностей, статистике и задачах цифровой обработки сигналов. В работе проведён сравнительный анализ по количеству операций, скорости вычислений и точности нескольких алгоритмов вычисления $\operatorname{erf}(x)$, что является важным для систем с ограниченными ресурсами.

№	Время (мс)	Тип	$x = 1/\pi$			$x = \pi$			$x = 4.5$					
			Погрешность	Операции		Погрешность	Операции		Погрешность	Операции				
				+	×	÷		+	×	÷		+	×	÷
1	46 666	f	$2.98 \cdot 10^{-8}$	15	22	10	$2.17 \cdot 10^{-5}$	108	146	72	$5.02 \cdot 10^{-1}$	195	262	130
		d	$5.55 \cdot 10^{-16}$	27	38	18	$5.45 \cdot 10^{-14}$	150	202	100	$3.69 \cdot 10^{-11}$	243	326	162
2	38 255	f	0	19	24	14	$2.38 \cdot 10^{-7}$	122	127	83	$2.98 \cdot 10^{-7}$	209	214	141
		d	0	31	36	22	$4.44 \cdot 10^{-16}$	161	166	109	$6.66 \cdot 10^{-16}$	254	259	171
3	10 156	f	$2.98 \cdot 10^{-8}$	18	16	13	$1.79 \cdot 10^{-7}$	117	82	79	$1.19 \cdot 10^{-7}$	204	140	137
		d	$5.55 \cdot 10^{-16}$	33	26	23	0	162	112	109	$9.99 \cdot 10^{-16}$	255	174	171
4	33 456	f	$5.96 \cdot 10^{-8}$	86	142	9	$1.70 \cdot 10^{-6}$	156	101	25	$3.13 \cdot 10^{-1}$	211	105	39
		d	0	140	109	12	$1.23 \cdot 10^{-11}$	235	113	33	$1.07 \cdot 10^{-7}$	303	143	48
5	9 340	f	$2.98 \cdot 10^{-8}$	13	15	9	0	48	50	44	0	77	79	73
		d	$5.07 \cdot 10^{-8}$	17	19	13	$7.63 \cdot 10^{-9}$	61	63	57	$8.93 \cdot 10^{-13}$	92	94	88
6	10 109	f	$2.98 \cdot 10^{-8}$	8	10	1	0	59	60	44	0	83	85	75
		d	$2.22 \cdot 10^{-15}$	8	10	1	0	72	73	57	0	98	100	90

Таблица 1. Сравнительный анализ вычисления $\operatorname{erf}(x)$.

В работе для вычисления использовались следующие формулы:

1. Ряд Тейлора

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)},$$

2. Ряд из Абрамовиц–Стиган [1, стр. 121]

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} z^{2n+1},$$

3. Через нижнюю неполную гамма-функцию [2, стр. 164]

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right),$$

4. Через функции Бесселя [1, стр. 121]

$$\operatorname{erf}(z) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [I_{2n+1/2}(z^2) - I_{2n+3/2}(z^2)],$$

где $I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

5. Приближение из Абрамовиц–Стиган [1, стр. 122]

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) e^{-x^2} + \varepsilon(x),$$

где $t = \frac{1}{1+px}$, $p = 0.3275911$, $|\varepsilon| \leq 1.5 \cdot 10^{-7}$

$a_1 = 0.25482959$, $a_2 = -0.28449673$, $a_3 = 1.42141374$,

$a_4 = -1.45315202$, $a_5 = 1.06140542$

6. Рациональная аппроксимация Коди [3]

- $\operatorname{erf}(x) \approx x R_{lm}(x^2)$; $|x| \leq 0.5$,
- $\operatorname{erfc}(x) \approx e^{-x^2} R_{lm}(x)$; $0.46875 \leq x \leq 4$,
- $\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{x^2} R_{lm}(1/x^2) \right)$; $x \geq 4$,

где R_{lm} — рациональные функции степени l в числителе и m в знаменателе.

Таблица 2. Методы вычисления $\operatorname{erf}(x)$.

Все алгоритмы (в том числе функции Бесселя, неполную гамма-функцию, e^x) я реализовал на языке C++ самостоятельно. В качестве эталонного значения $\operatorname{erf}(x)$ принималось значение из Wolfram Alpha. Для каждого метода оценивались погрешность и количество арифметических операций отдельно для типов данных float и double. Время замерялось для аргументов на диапазоне $x \in [0, 4]$ с шагом $5 \cdot 10^{-8}$. Для каждого метода измерялось суммарное время выполнения при вычислении $\operatorname{erf}(x)$ на точках диапазона. Результаты сведены в таблицу 1.

По итогу можно сказать, что наиболее подходящим для нас является метод №6, который обеспечивает наивысшую точность (в частности для типа double) при наименьшем количестве операций среди всех рассмотренных алгоритмов. При больших значениях x и для точности float также хорошо себя показывает метод №5.

Литература

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям. / М. Абрамовиц, И. Стиган — М. : Наука, 1979. — 832 с.
2. NIST Digital Library of Mathematical Functions.
— dlmf.nist.gov.
3. Cody W.J. Rational Chebyshev Approximations for the Error Function / W.J. Cody // Mathematics of Computation. — 1969. — Vol. 23, No. 107. — P. 631–637.

**О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО ОДУ ЧЕТВЕРТОГО
ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩЕГО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
В ФОРМЕ УРАВНЕНИЯ
ЛАГРАНЖА-ОСТРОГРАДСКОГО**

Т.Х. Лыу (Москва, РУДН)
lyu-t@rudn.ru

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$N(u) \equiv u^{(4)}(t) + a(t)u'''(t) + b(t)u''(t) + c(t)u'(t) + d(t)u(t) = 0, t \in (t_0, t_1). \quad (1)$$

Здесь $u(t)$ – неизвестная функция, $a \in C^3[t_0, t_1], b \in C^2[t_0, t_1], c \in C^1[t_0, t_1], d \in C[t_0, t_1]$ – заданные функции.

Положим

$$D(N) = \{u \in C^4[t_0, t_1] : u(t_0) = u_0, u'(t_0) = u'_0, u''(t_0) = u''_0, u'''(t_0) = u'''_0\}, \quad (2)$$

где u_0, u'_0, u''_0, u'''_0 – заданные постоянные.

Отметим, что

$$D(N'_u) = \{h \in C^4[t_0, t_1] : h(t_0) = 0, h'(t_0) = 0, h''(t_0) = 0, h'''(t_0) = 0\}.$$

Введем билинейную форму

$$\Phi(v, g) \equiv \int_{t_0}^{t_1} v(t)g(T-t)dt, \quad (3)$$

где $T = t_0 + t_1$.

Теорема 1. *Оператор N (1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (2) относительно билинейной формы (3) тогда и только тогда, когда $\forall t \in [t_0, t_1]$ выполнены следующие условия:*

$$\begin{aligned} a(t) &= a(T-t), \\ b(t) &= b(T-t) - 3a'(T-t), \\ c(t) &= c(T-t) - 2b'(T-t) + 3a''(T-t), \\ d(t) &= d(T-t) - c'(T-t) + b''(T-t) - a'''(T-t). \end{aligned}$$

Теорема 2. *Если оператор N (1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (2) относительно билинейной формы (3) и выполнены условия*

$$b(t) = \frac{3}{8}a^2(t) + \frac{3}{2}a'(t),$$

$$c(t) = \frac{1}{16}a^3(t) + \frac{3}{4}a(t)a'(t) + a''(t),$$

$$d(t) = \frac{1}{256}a^4(t) + \frac{3}{32}a^2(t)a'(t) + \frac{3}{16}(a'(t))^2 + \frac{1}{4}a(t)a''(t) + \frac{1}{4}a'''(t),$$

то общим решением уравнения (1) является

$$u(t) = e^{-\frac{1}{4} \int a(t)dt} (C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3),$$

где C_0, C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Литература

1. Budochkina S.A. On connection between variationality of a six-order ordinary differential equation and Hamilton-Ostrogradsky equations / S.A. Budochkina, Т.Н. Luu // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — vol. 42. — № 15. — Pp. 3594–3605.

2. Budochkina S.A. On indirect representability of fourth order ordinary differential equation in form of Hamilton-Ostrogradsky equations / S.A. Budochkina, Т.Н. Luu, V.A. Shokarev // Ufa Mathematical Journal. — 2023. — vol. 15. — № 3. — Pp. 118–128.

3. Будочкина С.А. Обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка и уравнения Гамильтона-Остроградского / С.А. Будочкина, Т.Х. Лыу // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2023. — № 4. — С. 55–71.

4. Budochkina S.A. On variational symmetries and conservation laws of a fifth-order partial differential equation / S.A. Budochkina, Т.Н. Luu // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — vol. 45. — № 6. — Pp. 2466–2477.

5. Будочкина С.А. О вариационном принципе для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений / С.А. Будочкина, Т.Х. Лыу // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2025. — Т. 71, — № 1. — С. 71–84.

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ЭНЕРГИИ ПОРОЖДЕННЫХ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СКРЫТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Л.Н. Ляхов (Воронеж, ВГУ; Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина;
Липецк, ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского)

levnlya@mail.ru

Термин «скрытая симметрия» возник в космологии и дал возможность рассматривать силы как способ, которым «в природе поддерживаются различные абстрактные симметрии» [1, с.12]. В математике этот термин появился в связи с возможностью вычислить размерности фрактальных самоподобий, которые не совпадают с размерностью «фрактальной пыли». Это связано с фактом зависимости интеграла со степенным весом по концентрическим сферам в \mathbb{R}_n от радиуса сферы так, как если бы эта величина давала меру сферы в дробно-размерном как бы «евклидовом» пространстве.

В этой связи появился большой интерес к интегралам энергии В-гиперболического уравнения с отрицательными показателями скрытой симметрии. Рассматривается сингулярный дифференциальный оператор Бесселя $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ с действительным параметром γ_i . Изучается интеграл энергии смешанной задачи для В-гиперболического уравнения $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i} u(x,t) = f(x,t)$ в цилиндре $G = \Omega \times (0, \infty)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ — ограниченная область. $|\gamma|$ — Коэффициент скрытой сферической симметрии (может быть отрицательным), $n + |\gamma|$ — псевдоевклидова размерность Ω . Строятся три типа интегралов энергии: 1) в области Ω , принадлежащей внутренней части $x_i \geq \delta > 0$ евклидова n -полупространства, $n + |\gamma|$ — произвольное действительное число; 2) в области Ω^+ , прилегающей к координатным гиперплоскостям $x_i = 0$, с параметрами $\gamma_i > -1$ и $0 < n + |\gamma| < n$; 3) в области, полученной объединением области Ω^+ со своим зеркальным отражением от координатных гиперплоскостей $x_i = 0$, отвечающих индексу i : $\gamma_i \leq -1$.

Смешанная задача ставится следующим образом: найти функцию $u(x,t) \in C_{ev}^2(GT) \cup C_{ev}^1(\overline{GT})$, удовлетворяющую уравнению

$$\square_{\gamma} u(x,t) = \rho(x) u_{tt}(x,t) - (\Delta_{B_{\gamma}})_x u(x,t) = f(x,t),$$

$$\|f(t)\|_{L_2^{\gamma}(\Omega)} \in C_{ev}(0,T),$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

и граничным условиям

$$\forall \gamma_i \geq -1 \implies \left(\alpha(x) u(x_i) - \beta(x) \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} \right) \Big|_{x \in \Gamma^+} = 0,$$

$$\gamma_k < -1 \implies \left(\alpha(x) u(x,t) + \beta_{\gamma_k}(x^k) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} \right) \Big|_{x_k=0} = 0,$$

где введены обозначения:

$$x=(x_i, x^i), \quad x^i=(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

и терсеновской форме смешанного граничного условия

$$\beta_{\gamma_j}(0, x^i) = \lim_{x_j \rightarrow 0} \beta(x) x_j^{|\gamma_j|}, \quad 0 \leq \beta_{\gamma_j} < \infty.$$

Здесь $\alpha(x) \in C_{ev}(\Gamma^+)$, $\beta(x) \in C_{ev}(\Gamma^+)$, $\alpha(x) > 0$, $\beta(x) > 0$, $\bar{\nu}$ — направление внешней нормали к границе Γ . На сильно сингулярных границах $\Gamma_{x_k=0}^0$, $k \leq n$ условия более жесткие: подавляя сингулярность (и учитывая невозможности равенств $\alpha=0$ и $\beta=0$ одновременно на границе $\partial\Omega^+$) необходимо потребовать, чтобы $\alpha > 0$, $\beta = O(x_k^{|\gamma_k|})$, $x_k \rightarrow 0$. Последнее условие определяет «скорость» сходимости функции β к нулю при $x_n \rightarrow 0$. Ранее подобное условие вводилось С.А. Терсеновым в цикле работ (см., например, [2] и имеющиеся там ссылки) для решения некоторых классов сингулярных и вырождающихся уравнений. Интегралом энергии называется величина

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^+} (\rho(x)u_t^2(x, t) + |\nabla_x u(x, t)|^2) x^\gamma dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} \frac{\alpha}{\beta} u^2(x, t) x^\gamma d\Gamma + \frac{1}{2} \sum_{j=n_1+1}^n \int_{\Gamma_{x_j=0}^0} \frac{\alpha}{\beta_j} u^2(x, t) d\Gamma.$$

Общий результат. Пусть $m \leq n$, $\gamma_i > -1$, для $i = \overline{(1, m)}$ и $\gamma_j \leq -1$, для $j = \overline{(m+1, n)}$. Если $u = u(x, t)$ — классическое решение смешанной задачи в области $G = \Omega \times [0, \infty]$, то для любого $t > 0$ справедливо соотношение

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \int_{\Omega^+} u_\tau(x, \tau) f(x, \tau) d\tau dx x^\gamma dx,$$

где

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^+} \lim_{\Omega^+} [\rho(x)\psi^2(x) + |\nabla\varphi(x)|^2] x^\gamma dy + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} \lim_{\Gamma^+} \frac{\alpha}{\beta} \varphi^2(x) dx \Gamma + \sum_{j=n_1+1}^n \int_{\Gamma^0=\{x: x_j=0\}} \frac{\alpha}{\beta} \varphi^2(x) dx_j.$$

Коэффициенту скрытой симметрии γ_i в определении функции β_{γ_i} можно придать физический смысл, предполагая, что $\beta_{\gamma_i} =$

$\lim_{x_i \rightarrow 0} x^{-\gamma_i} \beta(x_i, x^i)$ — это космологической константы Эйнштейна, введенная им как граница возможности значительной (бесконечной) плотности массы в точке и ей пропорциональной энергии, приводящей к гравитационному коллапсу сверхмассивное космическое тело.

Последний пункт работы — приводится вытекающая из этих исследований возможная математическая модель первичной черной дыры Хокинга—Пенроуза.

Литература

1. Девис П. Суперсила. Поиски единой теории природы / П. Девис. — М. : Мир, 1989. — 272 с.
2. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе / С.А. Терсенов. — Новосибирск : НГУ, 1973. — 144 с.
3. Ляхов Л. Н. Об интегралах энергии смешанной задачи для В-гиперболического уравнения / Л.Н. Ляхов // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2025. — Т. 523, № 1. — С. 59–65.
4. Ляхов Л. Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Математические заметки. — 2023. — Т. 113, № 4. — С. 517–528.
5. Пенроуз Р. Путь к реальности или законы, управляющие вселенной. Издательство Москва \diamond Ижевск. 2007. С. 911.
6. Хокинг С. Краткие ответы на большие вопросы. / Москва. Эксмо. 2019.
7. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. / М.: Мир. 1979. С. 592.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕЛЬФАНДА—ШАПИРО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА—КИПРИЯНОВА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СКРЫТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Л.Н. Ляхов, С.А. Рошупкин, В.А. Калитвин (Воронеж,
ВГУ, Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, Липецк, ЛГПУ им. П.П.
Семенова-Тян-Шанского)

(Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)

(Липецк, ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского)

levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru, kalitvinv@yandex.ru

Авторы расширяют понятие введенного ранее преобразование Радона—Киприянова $K_\gamma[f](p, \theta)$ (в работе [1]) для случая, когда весовые параметры мультииндекса $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ принимают слабоотрицательные значения $-\gamma_i \in (-1, 0)$. Для этих значений мультииндекса используются сведения о соответствующих «инструментах весового гармонического анализа», которые наиболее полно приведены в диссертации [2].

Введем обозначения $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x : x_i > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : x_i \geq 0\}$, $i = \overline{1, n}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Пусть $\langle x, \theta \rangle = \sum_i x_i \theta_i$, $|\theta| = 1$ и $p = \langle x, \theta \rangle$ — уравнение нормальной плоскости в \mathbb{R}_n .

Пусть $-\gamma_i = -2\mu_i + 1$, $\frac{1}{2} < \mu_i < 1$. Для этих значений γ_i вводим многомерный оператор Пуассона $\mathcal{P}_x^\mu f(x, t) = C(n, \mu) \times \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(x_1 \cos a_1, \dots, x_n \cos a_n, t) \prod_{i=1}^n \sin^{2\mu_i} \alpha_i d\alpha_i$. Через посредство оператора Пуассона введем в пространстве распределений $S'_{ev, -\gamma}$ весовую обобщенную δ -функцию, сосредоточенную на поверхности $P(x) = 0, x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$ (как правило, размерности $n - 1$). Здесь применены результаты статьи [4].

Пусть $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ подпространство пространства Л. Шварца основных функций и $\varphi = \varphi(x) \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$. Весовой обобщенной δ -функцией, сосредоточенной на положительной части поверхности плоскости $\langle x, \theta \rangle = p$ будем называть следующее распределение

$$(\mathcal{P}_x^\gamma \delta(p - \langle x, \theta \rangle), \varphi)_{-\gamma} = C(n, \mu) \int_{\Gamma = \{z : P(z) = 0\}} \tilde{\varphi}(z) \prod_{i=1}^n z_i^{-2\mu} d\Gamma(z), \quad \text{где}$$

$C(n, \mu)$ — константа, нормирующая многомерный оператор Пуассона (1) и введены обозначения $z = (z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) = (Z_1, Z_2)$, $\left\{ \begin{array}{l} z_{2i-1} = x_i \cos \alpha_i, \quad 0 < \alpha_i < \pi, \quad i = \overline{1, n}, \\ z_{2i} = x_i \sin \alpha_i, \quad -\infty < z_{2i-1} < \infty, \quad 0 < z_{2i} < \infty. \end{array} \right\}$,

$$\tilde{\varphi}(z) = \varphi \left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2} \right) = \tilde{\varphi}(Z_1, Z_2).$$

$K_{-\gamma}$ -преобразование Радона—Киприянова. Это преобразование вводится интегрированием по \mathcal{P} — плоскости:

$$\{z \in \mathbb{R}_{2n}^+ : \langle z, \Theta \rangle = p\}, \quad \Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \theta_3, \dots, 0, \theta_n, 0) \in \overline{\mathbb{R}_{2n}^+}.$$

В случае $-1 < \gamma_i < 0$ представление Гельфанда—Шапиро преобразования Радона—Киприянова вводится следующим образом:

$$K_{-\gamma}[f](\theta; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_x^\gamma \delta(p - \langle x; \theta \rangle) x^{-\gamma} dx = K_{-\gamma}[f](\Theta; p) =$$

$$C(n, \mu) \int_{\Gamma=\{z:p=\langle z, \Theta \rangle\}^+} \tilde{f}(z) \prod_{i=1}^n z_{2i}^{2\mu_i} d\Gamma(z).$$

Теорема 1. Для произвольного ораспределения $f \in S'_{ev}$ преобразования Радона—Киприянова (3) имеет вид

$$K_{-\gamma}[f](p, \theta) = R_{(spec)}[M_{1-\gamma}[f]](p, \Theta) = \\ = C(n, \gamma) \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\mathbb{R}_n^+} \tilde{f}(Z_1, Z_2) Z_2^{1-\gamma} dZ_2 f dZ_1,$$

где $R_{(spec)}$ — специальное преобразование Радона по переменным с нечетными номерами z_{2i-1} , $i = \overline{(1, n)}$, $M_{1-\gamma}$ — преобразование Меллина (многомерное) по переменным с четными номерами z_{2i} , $i = \overline{(1, n)}$, с показателями весов $1 - \gamma = (1 - \gamma_2, \dots, 1 - \gamma_{2-n})$.

Литература

1. Киприянов И. А., О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона / И. А. Киприянов, Л. Н. Ляхов // Докл. АН СССР, 360:2 — 1998, — С. 157–160.

2. Ляхов Л. Н., Преобразование Киприянова—Радона, / Л. Н. Ляхов // Тр. МИАН., 248 — 2005 — с. 153–163.

3. Катрахов В. В. Сингулярные краевые задачи / В. В. Катрахов, А. А. Катрахова, Л. Н. Ляхов, А. Б. Муравник, С. М. Ситник, Хе Кан Чер // ООО ИПЦ «Научная книга», Воронеж — 2024.

4. Гельфанд И. М., Шапиро З. Я. Однородные функции и их приложения. УМН. 10, 3(65), — 1955, — С. 3–70.

5. Наттерер Ф. Математические основы компьютерной томографии, Мир, М. — 1990.

О БАЗИСНЫХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ТИПА ДИРАКА¹

А.С. Макин (Донецк, ИПММ)

alexmakin@yandex.ru

В настоящей работе изучается система типа Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y} = \text{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} b_1^{-1} & 0 \\ 0 & b_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad b_2 < 0 < b_1, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для ФГБНУ ИПММ (тема № FREM-2026-0004).

© Макин А.С., 2026

функции $P, Q \in L_1(0, \pi)$, с двухточечными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{y}) &= a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \\ U_2(\mathbf{y}) &= a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициенты a_{jk} произвольные комплексные числа, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Оператор $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ является линейным оператором в пространстве $\mathbb{H} = L_2(0, \pi) \oplus L_2(0, \pi)$, с областью определения $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0, \pi] \oplus W_1^1[0, \pi] : \mathbb{L}\mathbf{y} \in \mathbb{H}, U_j(\mathbf{y}) = 0 \ (j = 1, 2)\}$.

Обозначим через A_{jk} ($1 \leq j < k \leq 4$) определитель, составленный из j -го и k -го столбцов матрицы A . Обозначим также через

$$E(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x, \lambda) & e_{12}(x, \lambda) \\ e_{21}(x, \lambda) & e_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

матрицу фундаментальной системы решений уравнения (1) с краевыми условиями $E(0, \lambda) = I$, где I единичная матрица.

Из [1] следует, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) может быть приведен к виду

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= A_{12} + A_{34}e^{i\pi(b_1+b_2)\lambda} + A_{32}e_{11}(\pi, \lambda) + A_{14}e_{22}(\pi, \lambda) + A_{13}e_{12}(\pi, \lambda) + \\ &+ A_{42}e_{21}(\pi, \lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_0^\pi r_1(t)e^{ib_2\lambda t} dt + \int_0^\pi r_2(t)e^{ib_1\lambda t} dt, \end{aligned}$$

где функция

$$\Delta_0(\lambda) = A_{12} + A_{34}e^{i\pi(b_1+b_2)\lambda} - A_{23}e^{i\pi b_1\lambda} + A_{14}e^{i\pi b_2\lambda}$$

является характеристическим определителем задачи (3)

$$B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}, \quad U(\mathbf{y}) = 0, \quad (3)$$

а функции $r_j \in L_1(0, \pi)$, $j = 1, 2$.

Определение 1. Краевые условия (2) называются вырожденными, если они удовлетворяют одному из следующих условий

- а) $b_1 + b_2 = 0$, $A_{14}A_{23} = 0$, $(A_{12} + A_{34})(|A_{23}| + |A_{14}|) = 0$;
- б) $b_1 + b_2 \neq 0$, $A_{14}A_{23} = 0$, $A_{12} = A_{34} = 0$;
- в) $b_1 + b_2 \neq 0$, $A_{14} = A_{23} = 0$, $A_{12}A_{34} = 0$.

Легко показать, что спектр краевой задачи для оператора (1), (2) с вырожденными краевыми условиями при $V(x) \equiv 0$ либо пуст, либо заполняет всю комплексную плоскость, т.е. $\Delta_0(\lambda) \equiv 0$.

Рассмотрим случай $\Delta_0(\lambda) \equiv 0$. Он реализуется, если

$$b_1 + b_2 = 0, \quad A_{14} = A_{23} = A_{12} + A_{34} = 0 \quad (4)$$

или

$$b_1 + b_2 \neq 0, \quad A_{14} = A_{23} = A_{12} = A_{34} = 0. \quad (5)$$

Теорема 1. *Предположим, существует подпоследовательность собственных значений λ_{n_i} , такая что*

$$|\operatorname{Im}\lambda_{n_i}| < M,$$

где M – некоторая постоянная. Пусть порядок присоединенных функций, соответствующих λ_{n_i} , ограничен одной константой. Тогда системы корневых функций задач (1), (2), (4) и (1), (2), (5) не образуют базис в пространстве \mathbb{H} .

Литература

1. Lunyov A.A. On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators / A.A. Lunyov, M.M. Malamud // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — V. 441. — P. 57–103.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮТИВНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ

Е.А. Максимова (Москва, МГУСИ)

ekamaks@bk.ru

В области $D = \{(x, y) \mid |y| < |\frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}||\}$ рассмотрено дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с инволютивным отклонением по переменной y :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) - \frac{2}{y} \left(p \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + q \frac{\partial}{\partial y} u(x, -y) \right) = 0, \quad (1)$$

где $q \neq 0$, $-\frac{1}{2} < p + q < \frac{1}{2}$.

Инволютивным отклонением[1] называется гомеоморфизм

$$\alpha^2(t) = \alpha(\alpha(t)) = t.$$

Это преобразование точек плоскости (x, y) , принадлежащих области Ω , которое ставит в соответствие каждой точке $Q(x, y) \in \Omega$ точку $P(\alpha(x, y); \beta(x, y)) \in \Omega$. При этом

$$\alpha(\alpha(x, y); \beta(x, y)) = x, \beta(\alpha(x, y); \beta(x, y)) = y.$$

Впервые обыкновенные дифференциальные уравнения со сдвигом рассмотрены в работе Ч. Баббеджа[2] и В. Файта[3].

Вопросу краевых задач для уравнением с отклоняющимся аргументом для дифференциальных уравнений в частных производных были посвящены работы А. А. Андреева[4], А. Н. Зарубина[5], А. П. Хромова[6], М. Ш. Бурлуцкой[7].

В настоящей работе для уравнения (1) с применением результатов, полученных автором ранее[8] для систем уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу, сформулирован и решен корректный аналог задачи Коши.

Задача Коши: Найти решение уравнения (1) $u(x, y) \in C(\bar{D})$ в области $D = \{(x, y) \mid |y| < \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|\}$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), x \in [0, 1]; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow 0} |y|^{2(p+q)} (u_y(x, y) + u_y(x, -y)) \\ & + |y|^{2(p-q)} (u_y(x, y) - u_y(x, -y)) = 2\nu(x), x \in (0, 1). \end{aligned} \quad (3)$$

В явном виде получены решения в зависимости от значений p, q . Основной результат представлен в виде следующей теоремы.

Теорема. Если $\tau(x) \in C^k[0, 1], \nu(x) \in C^2(0, 1), k = 2 - \lfloor p + q \rfloor$, то решение $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup (0, 1)) \cap C^2(D)$ и задача (2), (3) для уравнения (1) в области $D = \{(x, y) \mid |y| < \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|\}$ при ограничениях на параметры $-1/2 < p \pm q < 1/2$ корректна по Адамару.

Литература

1. Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verhandl. des internat. Mathem. Kongr. — 1932. — Vol. 3. — P. 138–151.
2. Babbage C. An essay towards the calculus of function // Philosophical transactions of the Royal Society of London. — 1816. — Vol. 11. — P. 179–256.
3. Fite W. B. Properties of the solution of certain functional differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1921. — Vol. 3. — P. 311–319.

4. Андреев А. А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 2004. — Т. 40, № 8. — С. 1192–1195.

5. Зарубин А. Н. Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1996. — Т. 32, № 3. — С. 350–356.

6. Хромов А. П. Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2010. — Т. 10, № 4. — С. 17–22.

7. Бурлуцкая М. Ш. Некоторые свойства функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$ и их приложения // Изв. вузов. Матем. — 2021. — Т. 5. — С. 89–97.

8. Максимова Е. А. О задаче Коши для n -мерной системы уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу на плоскости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2012, выпуск 1(26), с 21–30.

**КРИТЕРИЙ ОБНАРУЖЕНИЯ ДВУХ
ИСТОЧНИКОВ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ
ЭКВИДИСТАНТНОЙ КРУГОВОЙ АНТЕННОЙ
РЕШЕТКИ С ЧИСЛОМ ДАТЧИКОВ
НЕ МЕНЬШЕ ПЯТИ**

А.Р. Малютин (Воронеж, ВГУ)
malyutinaleks181003@gmail.com

В работе изучается возможность определения наличия двух источников радиолучей на антенной кольцевой эквидистантной решетке (с числом датчиков большим или равным пяти) по значениям модулей амплитуд сигналов в идеальном случае без помех. Случай антенны с пятью датчиками рассматривался ранее в работе [2].

В случае прихода сигнала от нескольких источников на датчике с номером k регистрируются комплекснозначные значения U_k , определяемые формулами:

$$U_k = \sum_{j=1}^m E(\vec{k}_j, \vec{r}_k, t), E(\vec{k}, \vec{r}, t) = A e^{i(-\omega \cdot t + \varphi)} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}, k = \overline{1, n},$$

где n - число датчиков, \vec{k}_j - волновой вектор, t - время, \vec{r}_k - радиус-вектор точки пространства. Кроме того, E зависит от амплитуды A , круговой частоты ω , фазы φ .

Волновой вектор \vec{k}_j определяется частотой регистрируемого сигнала λ , углом возвышения β_j и азимутом θ_j , радиус-вектор \vec{r}_k углом γ_k и радиусом решетки R

$$\vec{k}_j = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} (\cos \beta_j \cos \theta_j, \cos \beta_j \sin \theta_j, \sin \beta_j), \vec{r}_k = (R \cos \gamma_k, R \sin \gamma_k, 0).$$

Предполагается, что антенная решетка радиуса R расположена горизонтально, а начало координат находится в центре круга.

Проблема обнаружения количества источников сигналов заключается в том, что одна группа сигналов может давать те же значения, что и другая в таком случае будут выполняться равенства

$$\sum_{j=1}^{m_1} E(\vec{k}_j, \vec{r}_k, t) = \sum_{s=m_1+1}^{m_2} E(\vec{k}_s, \vec{r}_k, t), k = \overline{1, n}.$$

В данной работе разбирается наиболее часто встречающийся на практике случай, когда два сигнала дают такие же значения как один, то есть выполняются равенства:

$$U_k = E(\vec{k}_1, \vec{r}_k, t) + E(\vec{k}_2, \vec{r}_k, t) = E(\vec{k}_3, \vec{r}_k, t), \quad (1)$$

для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Тогда для квадратов модулей U_k справедливы равенства:

$$|U_1|^2 = |U_2|^2 = \dots = |U_n|^2 = A_3^2. \quad (2)$$

В работе была доказана следующая теорема:

Теорема 1. Не существует вещественных чисел $A_1 > 0, A_2 > 0, \beta_1, \beta_2 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2 \in [0; 2\pi], \rho$ таких, что модуль комплексного числа

$$|A_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\rho \cdot \cos \beta_1 \cos(\theta_1 - \gamma_k)} + A_2 \cdot e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\rho \cdot \cos \beta_2 \cos(\theta_2 - \gamma_k)}|,$$

принимал бы одинаковые значения для всех $\gamma_k, k = 1, 2, 3, \dots, n$, где $n \geq 5$ и

$$\gamma_k = \frac{2 \cdot \pi \cdot (k - 1)}{n}.$$

При условии, что $0 < \rho \geq \frac{\pi}{2}$ и $\theta_1 - \theta_2 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Данная теорема показывает, что в случае, когда $n \geq 5$ равенства (2) не выполняются при наложенных условиях, это означает, что по значениям модулей амплитуды без шумовой загрязненности

данных можно обнаружить два источника.

Литература

1. Виноградов А.Д. Алгоритм аналитического разделения радиолучей двухлучевого электромагнитного поля малобазовым радиопеленгатором с четырехэлементной эквидистантной кольцевой антенной решеткой / А.Д. Виноградов. — М. : Антенны. 2022. № 5. С. 49–55. DOI: <https://doi.org/10.18127/j03209601-202205-03>.

2. Малютин А.Р. О математических особенностях разделения двух радио сигналов на аквидистантной малобазовой антенной решетке / А.Р. Малютин. — Воронеж издательский дом ВГУ. : Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. 2025. С. 235-237.

ОБ ОДНОЙ РЕГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Д.А. Маслов (Москва, «НИУ «МЭИ»)

MaslovDmA@mpei.ru

Пусть пространство E является оснащённым банаховым пространством [1], в котором $\|v\|$ — норма элемента $v \in E$, и также введена порождаемая скалярным произведением $\langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in E$, норма $\|v\|_c = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, подчинённая норме пространства E , то есть, $\exists \gamma > 0 : \|v\|_c \leq \gamma \|v\| \quad \forall v \in E$.

Рассмотрим в E нелинейную спектральную задачу

$$Au + \lambda Gu = \varepsilon B(H_1 u, \dots, H_\ell u), \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; A, G, H_j — замкнутые неограниченные операторы, такие что области определения $D(A) \subset D(G)$, $D(A) \subset D(H_j)$, $j = 1, \dots, \ell$. $B : E \times \dots \times E \rightarrow E$ — полилинейный ограниченный оператор (ℓ -линейный оператор).

Пусть выполнены следующие условия:

1°. Оператор A непрерывно обратим.

2°. Оператор $A + \lambda G$ является симметрическим и обладает системой ортонормированных собственных векторов $\{b_1, b_2, \dots\}$, входящей в базис гильбертова пространства, в которое погружено пространство E , $\{\lambda_{0,1}, \lambda_{0,2} \dots\}$ — собственные значения.

3°. Оператор $A + \lambda_{0,m}G$ непрерывно обратим на пространстве $E \setminus E_m$, $m = 1, 2, \dots$, где $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ – набор одномерных подпространств, натянутых на собственные векторы b_m , причём $E_m \perp E \setminus E_m$ в смысле введённого скалярного произведения.

Решение задачи (1) будем искать в виде рядов по степеням ε :

$$\lambda_m = \lambda_{0,m} + \lambda_{1,m}\varepsilon + \dots + \lambda_{n,m}\varepsilon^n + \dots, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$u_m = u_{0,m} + u_{1,m}\varepsilon + \dots + u_{n,m}\varepsilon^n + \dots, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

В соответствии с методом неопределённых коэффициентов:

$$\begin{aligned} Au_{0,m} + \lambda_{0,m}Gu_{0,m} &= 0, \\ Au_{1,m} + \lambda_{0,m}Gu_{1,m} &= -\lambda_{1,m}Gu_{0,m} + B(H_1u_{0,m}, \dots, H_\ell u_{0,m}), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Au_{n,m} + \lambda_{0,m}Gu_{n,m} &= -\sum_{k=1}^n \lambda_{k,m}Gu_{n-k,m} + \\ &+ \sum_{i_1+\dots+i_\ell=n-1} B(H_1u_{i_1,m}, \dots, H_\ell u_{i_\ell,m}) \\ &\dots \end{aligned}$$

Действуя так же, как и в линейной теории регулярных возмущений [2], определяем коэффициенты рядов (2), (3):

$$\begin{aligned} u_{0,m} &= b_m; \quad \lambda_{1,m} = \frac{\langle B(H_1b_m, \dots, H_\ell b_m), b_m \rangle}{\langle Gb_m, b_m \rangle}, \\ u_{1,m} &= (A + \lambda_{0,m}G)^{-1}|_{E \setminus E_m} [-\lambda_{1,m}Gb_m + B(H_1b_m, \dots, H_\ell b_m)]; \\ &\dots \\ \lambda_{n,m} &= \frac{1}{\langle Gb_m, b_m \rangle} \left[\sum_{i_1+\dots+i_\ell=n-1} \langle B(H_1u_{i_1,m}, \dots, H_\ell u_{i_\ell,m}), b_m \rangle \right], \\ u_{n,m} &= (A + \lambda_{0,m}G)^{-1}|_{E \setminus E_m} \left[-\sum_{k=1}^n \lambda_{k,m}Gu_{n-k,m} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i_1+\dots+i_\ell=n-1} B(H_1u_{i_1,m}, \dots, H_\ell u_{i_\ell,m}) \right] \\ &\dots \end{aligned}$$

Теорема. Пусть выполнены условия $1^\circ-3^\circ$. Тогда задача (1) имеет собственные значения и собственные функции аналитические по малому параметру в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$.

При доказательстве теоремы вводились операторы $T_0 = GA^{-1}$, $T_j = H_j A^{-1}$, $j = 1, \dots, \ell$, которые являются ограниченными по теореме Банаха о замкнутом графике [3].

Литература

1. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 488 с.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Пер. с англ. / Т. Като. — М. : Мир, 1972. — 740 с.
3. Качалов В.И. Об аналитических решениях задач нелинейной теории возмущений / В.И. Качалов, Д.А. Маслов // Сиб. электрон. матем. изв. — 2025. — Т. 22, № 1. — С. 457–464.

СТИХОТВОРНЫЕ ФОРМЫ КАК ДИДАКТИЧЕСКИЙ ИНСТРУМЕНТ ОСВОЕНИЯ ПРАВИЛ: ЭФФЕКТИВНОСТЬ И МЕТОДИКА ВНЕДРЕНИЯ

А.М. Матлашова (ст.Брюховецкая, МБОУ СОШ № 20 имени
Г.К. Жукова)

aleksandra.blednova@mail.ru

Назовите про себя порядок цветов радуги. Признайтесь, вспоминаете сразу про охотника? А что такое «биссектриса»? Уверена, что если задать этот вопрос школьникам, то 90% ответят, что это крыса. И лишь оставшиеся 10% могут вспомнить, что это на самом-то деле луч. Если же спросить это у взрослых людей, уже окончивших школу, то процент вспомнивших про луч будет и того ниже, зато про крысу помнят все. С чем это связано? Прослеживается прочная связь с формой, в которой представляется определение. Шуточная стихотворная форма быстрее запоминается, чем скучное математическое определение.

Часто мы сталкиваемся с ограниченными возможностями памяти у учеников, когда дело доходит до заучивания правил и определений, не имеющих художественных ассоциаций. Но возможно смена формы представления информации поможет преодолеть эти трудности. Таким образом, возникает необходимость помочь учащимся в развитии памяти и запоминании сложных тем и правил. Для этого можно применять различные мнемотехники. В ходе педагогической

деятельности было принято решение о применении рифмованных ритмичных стихотворений в качестве правил для запоминания.

Одной из самых сложных и основополагающих тем в курсе математики 5 класса является тема «Обыкновенные дроби». Именно с ней часто возникают проблемы у учеников, которые в будущем только усугубляются. Поэтому первоочередной задачей было поставлено переработать основные правила именно этой темы. За основу была взята очередность тем в учебнике математики 5 класса Виленкина Н.Я.

Например, первое правило на запоминание того, где находится числитель, а где знаменатель, выглядит следующим образом:

*Каждый может за версту
Видеть дробную черту.
Над чертой – числитель, знайте,
Под чертою – знаменатель.*

В образовательный процесс эта форма внедрялась следующим образом. В начале изучения новой темы ученикам на доске предлагалось стихотворение, в котором были пропущены 1-2 ключевых слова. Задача учащихся была правильно заполнить пропуски. После чего стихотворение записывается в тетради, вместе вслух проговаривается, разбирается как правило и даётся для заучивания наизусть в качестве домашнего задания. На следующем уроке кто-то один из класса на выбор учителя рассказывает его на оценку. Таким образом сразу в начале урока повышается интерес и учебная мотивация учеников.

В параллели пятых классов было решено провести эксперимент для выявления влияния стихотворной формы правил на качество их заучивания и применения на практике. В 5 «А» классе было решено внедрить применение «запоминалок». В то же время в 5 «Б» классе правила изучались традиционно по учебнику.

На начало эксперимента качество знаний в 5 «Б» классе было немного выше. Однако результаты не заставили себя долго ждать. На уроке работа экспериментального 5 «А» класса стала заметно активней, увеличилось количество желающих ответить устно или у доски. Те ученики, кто до этого был в отстающих, стали проявлять больший интерес к предмету.

Благодаря этому удалось добиться результата на самостоятельных. К примеру, на самостоятельной по теме «Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями» в экспериментальном 5 «А»

классе доля учащихся, преодолевших порог успешности составила 80%, в то время как в 5 «Б» классе лишь 60%.

Таким образом, можно сделать вывод, что стихотворная форма изучения правил благоприятно влияет на повышение успеваемости и дальнейший успех в изучении математики. Такие формы изучения можно рекомендовать для использования как на уроках, так и во внеурочной деятельности, и даже при самостоятельном изучении тем.

Литература

1. Козаренко В.А. Всё о памяти и способах запоминания / В.А. Козаренко. — М., 2015. — 219 с.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

К.О. Махмудов, У.Х. Турсунмуродова

(Самарканд, Самаркандский государственный университет имени
Шарофа Рашидова)

kotil.84@mail.ru, umidatursunmurodova2004@gmail.com

Пусть D —область в пространстве \mathbb{R}^3 с гладкой границей ∂D , состоящей из конечного числа кусочно-гладких поверхностей, S —часть границы ∂D . Пусть $u(y)$ —решение уравнения

$$(\Delta^2 - \Delta) u(x) = 0, \quad (1)$$

имеющая непрерывные частные производные не выше 4-го порядка в D . Такие решения называют регулярными. Обозначим через $\Phi(x, y)$ фундаментальное решение уравнения (1) в \mathbb{R}^3 :

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\exp(-|x - y|) - 1}{|x - y|}, \quad x \neq y.$$

Если к правой части прибавить произвольное регулярное решение, результат останется фундаментальным решением уравнения. Таким образом, рассматриваем следующую задачу Коши:

Требуется найти решение $u(x)$ в $x \in D$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} (\Delta^2 - \Delta) u(x) = 0 & \text{в } D, \\ u(y) = u_0(y) & \text{на } S, \\ \partial_\nu u(y) = u_1(y) & \text{на } S, \\ \Delta u(y) = u_2(y) & \text{на } S, \\ \partial_\nu(\Delta u(y)) = u_3(y) & \text{на } S. \end{cases} \quad (2)$$

Эта задача является некорректной, и она имеет не более одного решения, то есть:

- 1) решение существует не для любых данных;
- 2) решение не зависит непрерывно от данных Коши на S [1–3].

Пусть S является гладкой частью на границы D . Задача Коши для уравнения (1) в D с данными на S состоит в следующем. Найти решение $u(x)$ удовлетворяющее $(\Delta^2 - \Delta) u(x) = 0$ внутри D и такое, что $u(y) = u_0(y)$, $\partial_\nu u(y) = u_1(y)$, $\Delta u(y) = u_2(y)$ и $\partial_\nu(\Delta u(y)) = u_3(y)$ на S т.е., (2).

Для изучения задачи (2)–введем интеграл полностью определенный данными Коши u_0, u_1, u_2 и u_3 на S , а именно

$$G(x) = \int_S (\Phi(x-y)u_3 - u_2\partial_\nu(\Phi(x-y)) + \Delta_y(\Phi(x-y))u_1 - u_0\partial_{\nu_y}(\Phi(x-y))) ds,$$

для $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}$. Поскольку фундаментальное решение $\Phi(x-y)$ является вещественно аналитическим, то $G(x)$ является вещественно аналитической в дополнение \bar{S} . Более того, интеграл $G(x)$ удовлетворяет уравнения $(\Delta^2 - \Delta) G = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}$.

Теорема 1. Для того чтобы существовало решение и задачи Коши (2), непрерывное вместе со своими производными до третьего порядка вплоть до S , необходимо и достаточно, чтобы интеграл $G(x)$ может быть продолжен из $\mathbb{R}^3 \setminus D$ через S внутрь D как вещественно аналитическая функция.

Теорема 2. Для каждого решения и $u \in C^3(D \cup S)$ уравнения (1) имеет место формула

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S (C_n(x,y)\partial_\nu(\Delta u(y)) - \Delta u(y)\partial_\nu(C_n(x,y)) + \Delta_y(C_n(x,y))\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_{\nu_y}(C_n(x,y))) ds_y$$

Карлемана при всех $x \in D$.

Литература

1. Айзенберг, Л.А. Условно устойчивые задачи и формулы Карлемана / Л.А. Айзенберг, Н.Н. Тарханов // Сиб. матем. журн. — 1990. — Т. 31, вып. 6. — С. 9–15.

2. Tarkhanov, N.N. The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations / N.N. Tarkhanov. — 7-е изд., испр. и доп. — Berlin. : Akademie Verlag, 1995.

3. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. — М. : Наука, 1980. — 286 с.

ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ¹

И.В. Михайличенко, М.Ф. Черепова (Москва, НИУ «МЭИ»)
zheniakovaiv@mpei.ru, cherepovamf@mpei.ru

В слое $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T\}$, $0 < T < +\infty$, задан равномерно параболический оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \partial_i u + b_0(x, t)u,$$

с вещественными коэффициентами, удовлетворяющими условиям:

а) $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \sigma_i \sigma_j \geq \delta |\sigma|^2$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x, t) \in \overline{D}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$;

б) $a_{ij} \in H^{0, \omega_0}(\overline{D})$, $i, j = 1, \dots, n$, где ω_0 — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\tilde{\omega}_0(z) = \int_0^z \eta^{-1} d\eta \int_0^\eta y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, z > 0;$$

в) $b_i \in H^{0, \omega_1}(\overline{D})$, $i = 0, 1, \dots, n$, где модуль непрерывности ω_1 удовлетворяет условию Дини.

¹ Результаты получены в рамках выполнения государственного задания (проект FSWF-2026-0010).

© Михайличенко И.В., Черепова М.Ф., 2026

В D выделяется полуограниченная область $\Omega = \{(x, t) \in D : x_n > g(x_1, \dots, x_{n-1}, t)\}$ с негладкой боковой границей $\Sigma = \{(x, t) \in \bar{\Omega} : x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1}, t)\}$, где

$$g \in H^{1, \omega_2}(\bar{D}'), D' = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, T), \quad (1)$$

ω_2 — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\tilde{\omega}_2(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_2(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, z > 0.$$

(Определения пространств см. в [1]).

Обозначим через $N(x^0, t^0)$ единичный вектор внутренней нормали к $\Sigma_{t^0} = \Sigma \cap \{t = t^0\}$, $t^0 \in [0, T]$, и через $\nu(x^0, t^0)$ — вектор внутренней ко нормали к Σ_{t^0} . Производная функции $u(x, t)$ по ко нормали $\nu(x^0, t^0)$ в области Ω определяется по формуле

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x^0, t^0)} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0, t^0) N_j(x^0, t^0) \partial_i u(x, t), (x, t) \in \Omega.$$

В Ω рассмотрим вторую начально-краевую задачу

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, u|_{t=0} = 0 \text{ в } \Omega_0 = \bar{\Omega} \cap \{t = 0\}, \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi \text{ на } \Sigma. \quad (2)$$

Предполагаем, что

$$\psi \in H_0^{0, \omega_3}(\Sigma), \quad (3)$$

где модуль непрерывности ω_3 удовлетворяет условию

$$\tilde{\omega}_3(z) = \int_0^z \omega_3(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, z > 0.$$

Пусть ω, ϑ — модули непрерывности, $\omega \not\equiv 0, \vartheta \not\equiv 0$. Обозначим через $H^{1, \vartheta, \omega}(\bar{\Omega})$ пространство функций $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывных и ограниченных в $\bar{\Omega}$ вместе с производными $\partial_i u$, $i = 1, \dots, n$, с нормой

$$\|u; \Omega\|^{1, \vartheta, \omega} = \sup_{\Omega} |u(x, t)| + \sum_{i=1}^n \sup_{\Omega} |\partial_i u(x, t)| + \sup_{\Omega} \frac{|\Delta_t u(x, t)|}{|\Delta t|^{1/2} \vartheta(|\Delta t|^{1/2})} + \sum_{i=1}^n \sup_{\Omega} \frac{|\Delta_{x,t} \partial_i u(x, t)|}{\omega(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})}.$$

Теорема 1. Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия а)-в) и для боковой границы Σ — условие (1). Тогда для любой функции ψ , удовлетворяющей условию (3), существует классическое решение и задачи (2). При этом $u \in H_0^{1,\omega_4,\omega_5}(\bar{\Omega})$, $\omega_4 =$

$$\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_2 + \omega_3, \quad \omega_5 = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_3, \quad u$$

$$\|u; \Omega\|^{1,\omega_4,\omega_5} \leq C|\psi; \Sigma|^{0,\omega_3}.$$

Литература

1. Zhenyakova I.V. Jump relation for the conormal derivative of parabolic single layer potential / Zhenyakova I.V., Cherepova M.F. // *Applicable Analysis*. — 2025. — Vol. 104, issue 5. — P. 775-789.

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ ПРИ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В УСЛОВИЯХ ТРАНСМИССИИ¹

А.В. Морозов, В.Л. Прядиев (Воронеж, ВГУ)

morozov@math.vsu.ru, pryad@mail.ru

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, — связный ориентированный геометрический граф, определение которого понимается в соответствии с монографией [1]. Обозначим через $\mathcal{J}(\Gamma)$ множество внутренних вершин γ графа Γ , тогда $\mathcal{R}(\Gamma) = \Gamma \setminus \mathcal{J}(\Gamma)$ представляет собой объединение его рёбер. Далее будем полагать, что все вершины множества Γ являются внутренними ($\partial\Gamma = \emptyset$).

Основной объект исследования — начальная задача для волнового уравнения

$$u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t), \quad x \in \mathcal{R}(\Gamma), \quad t \in (0, +\infty), \quad (1)$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{и} \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

условиях связи общего вида в вершинах $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ при $t \in [0, +\infty)$

$$u_{tt}(a, t) = g_a \left(t, u(a, t), u_t(a, t), (u_{h(a,b)}^+)_{a \leftrightarrow b}(a, t) \right), \quad (3)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение №075-02-2026-1324.

© Морозов А.В., Прядиев В.Л., 2026

и включениях

$$u|_{\bar{\gamma} \times [0, +\infty)} \in C^2(\bar{\gamma} \times [0, +\infty)). \quad (4)$$

Здесь $u : \Gamma \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — искомая функция; φ, ψ, g_a известны, а $(u_{h(a,b)}^+)_a \leftrightarrow b$ обозначает совокупность правых частных производных по пространственной переменной, взятых по направлению h (от a к b) по всем a смежным с b . Решение (1)–(4) будем понимать классически и предполагать, что условия согласованы.

Теорема Пусть $n = \deg(a) + 2$ и функции g_a таковы, что для любых $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ и $t \in [0, +\infty)$ существуют

1) Положительная постоянная M_{g_a} , такая что

$$|g_a(t, 0, 0, \dots, 0)| \leq M_{g_a}.$$

2) Непрерывная неубывающая функция $\omega_a : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, такая что $\omega_a(0) = 0$, а кроме того

$$|g_a(t, x_1, x_2, \dots, x_n) - g_a(t, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq \eta_a(t) \cdot \omega_a \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \right),$$

где $\eta_a(t) \geq 0$ — всюду непрерывная функция и выполняется условие Оsgуда (см. [2])

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\omega_a(s)} = \infty.$$

3) Непрерывная неубывающая функция $\kappa_a : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, такая что $\kappa_a(0) = 0$, а кроме того

$$|g_a(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \varphi_a(t) \cdot \kappa_a \left(\frac{|x_1|}{t+1} \right) \cdot x_2,$$

где $\varphi_a(t) \geq 0$ — всюду непрерывная функция и

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s \cdot \kappa_a(s)} = \infty.$$

Тогда решение задачи (1)–(4) существует, единственно, дважды непрерывно дифференцируемо на $[0, +\infty)$ и продолжаемо сколь угодно далеко.

Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный и др. // М.: ФИЗМАТЛИТ. — 2005. — 272 с.

2. Osgood W.F. Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-

О ГЛОБАЛЬНОЙ БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Л.В. Насирова (Сумгаитский Государственный Университет, Баку, Азербайджан)
leyla.nasirova@sdu.edu.az

Рассмотрим следующую нелинейную задачу Штурма-Лиувилля

$$ly \equiv -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y + f(x, y, y', \lambda), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$a_0y(0) - b_0y'(0) = 0, \quad (2)$$

$$a_1y(1) + b_1y'(1) = 0, \quad (3)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ – спектральный параметр, $p \in C^1([0, 1]; (0, +\infty))$, $q \in C([0, 1]; [0, +\infty))$, $r \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ и существуют $x_0, x_1 \in [0, 1]$ такие, что $r(x_0)r(x_1) < 0$, a_0, b_0, c_0, d_0 – действительные постоянные такие, что $|a_0| + |b_0| > 0$, $|a_1| + |b_1| > 0$, $a_0b_0 \geq 0$, $a_1b_1 \geq 0$. Кроме того, нелинейный член f непрерывен на $[0, 1] \times \mathbb{R}^3$ и удовлетворяет условию:

$$\left| \frac{f(x, y, s, \lambda)}{y} \right| \leq M, \quad x \in [0, 1], \quad (y, s) \in \mathbb{R}^2, \quad y \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где M некоторая положительная постоянная.

Нелинейная задача (1) описывает динамику популяций в средах с сильной пространственной неоднородностью (см., напр., [1]).

Обозначим через $(b.c.)$ множество функций удовлетворяющих граничным условиям (2) и (3). Пусть $E = C^1[0, 1] \cap (b.c.)$ – Банахово пространство с нормой $\|y\|_1 = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty$, где $\max_{x \in [0, 1]} |y(x)|$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$, каждого $\sigma \in \{+, -\}$ и каждого $\nu \in \{+, -\}$, пусть $S'_{k, \sigma, \nu}$ – множество функций $y \in E$ такие, что (i) нули функции $y(x)$, $x \in [0, 1]$, являются простыми и эта функция имеет $k - 1$ нулей в интервале $(0, 1)$; (ii) функция $\nu y(x)$ положительна в правой проколотой окрестности точки $x = 0$; (iii) $\sigma \int_0^1 r(x)y^2(x)dx > 0$.

Отметим, что собственные значения линейной задачи

$$\begin{cases} (\ell y)(x) = \lambda r(x)y(x), & 0 < x < 1, \\ y \in (b.c.), \end{cases} \quad (4)$$

являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую и неограниченно убывающую последовательности такие, что

$$0 < \lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \dots < \lambda_k^+ < \dots; \quad 0 > \lambda_1^- > \lambda_2^- > \dots > \lambda_k^- > \dots,$$

соответственно. При каждом $k \in \mathbb{N}$ и каждом σ собственная функция $y_k^\sigma(x)$ соответствующая собственному значению λ_k^σ содержится в $S_{k,\sigma}^\nu$ [2].

$$\text{Пусть } r_1 = \max_{x \in [0,1]} r(x), \quad r_0 = \min_{x \in [0,1]} r(x).$$

Основными результатами данной работы является следующие теоремы.

Теорема 1 Предположим, что $M < \min \{ \lambda_1^+ r_1, \lambda_1^- r_0 \}$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$, каждого σ и каждого ν множество точек бифуркации задачи (1)-(3) по множеству $\mathbb{R} \times S_{k,\sigma}^\nu$ является непустым. Если $(\lambda, 0)$ является точкой бифуркации этой задачи по множеству $\mathbb{R} \times S_{k,\sigma}^\nu$, то $\lambda \in I_k^\sigma$, где $I_k^+ = [\lambda_k^+ - \frac{M}{r_1}, \lambda_k^+ + \frac{4M}{3r_1}]$, $I_k^- = [\lambda_k^- + \frac{4M}{3r_0}, \lambda_k^- - \frac{M}{r_0}]$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$, каждого σ и каждого ν обозначим через $D_{k,\sigma}^\nu$ объединение отрезка $I_k^\sigma \times \{0\}$ и всех компонентов множества решений задачи (1)-(3), которые ответвляются из отрезка $I_k^\sigma \times \{0\}$ по множеству $\mathbb{R}^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu$.

Теорема 2 [3]. Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$, каждого σ и каждого ν множество $D_{k,\sigma}^\nu$ содержится в полосе $I_k^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu$ и неограничено в $\mathbb{R} \times E$.

Отметим, что в отличие от ранее известных работ (см. [3] и приведенную там библиографию) в данной работе отказываемся от условия $yf(x, y, s, \lambda) \leq 0$, $x \in [0, 1]$, $(y, s, \lambda) \in \mathbb{R}^3$.

Литература

1. Fleming W.H. A selection-migration model in population genetics / W.H. Fleming // J. Math. Biology — 1975. — V. 2, No. 3. — P. 219–233.
2. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. — X. : ГНТИ, 1939. — 719 с.
3. Aliyev, Z.S. Bifurcation from zero or infinity in nonlinearizable Sturm-Liouville problems with indefinite weight / Z.S. Aliyev, L.V.

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ
УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИ С МАЛОЙ ДИССИПАЦИЕЙ
В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ¹**

А.В. Нестеров (Москва, РЭУ им. Г.В. Плеханова)
andrenesterov@yandex.ru

Строятся первые члены асимптотического разложения (АР) по малому параметру сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений с малой диссипацией в критическом случае [1]

$$\varepsilon^6(U_{tt} - KU_{xx}) = AU + \varepsilon^3 qAU_t, |x| < \infty, t > 0. \quad (1)$$

Здесь $U(x, t, \varepsilon) \subset R^m$, $m \geq 2$ натуральное число, $0 < \varepsilon \ll 1$ –малый параметр, матрица $K = \text{diag} \{k_i^2, i = 1, \dots, m\}$ диагональная, матрицы $K, A - \text{const}$ постоянные, коэффициент $q - \text{const}, q > 0$ положительный, постоянный. Матрица A имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda = 0$, которому отвечает собственный вектор h , остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Для системы (1) ставятся начальные условия вида «узкая шапочка»

$$U(x, 0, \varepsilon) = U^0(x/\varepsilon^2), U_t(x, 0, \varepsilon) = \Phi(x/\varepsilon^2). \quad (2)$$

Здесь функции $U^0(x), \Phi(x)$ достаточно гладкие и принадлежат классу Шварца быстро убывающих функций: $U^0(x), \Phi(x) \subset \tilde{S}(R^1)$

Настоящая работа есть продолжение работ [2]-[3]. Построенное АР решения задачи (1)- (2) имеет вид

$$U(x, 0, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{i=3} (S_i^I(\zeta_1, t) + S_i^{II}(\zeta_2, t) + \Pi_i(\xi, \tau)) + R, \quad (3)$$

где $\zeta_{1,2} = (x \mp kt)/\varepsilon^2$, $\xi = x/\varepsilon^2, \tau = t/\varepsilon^3$, k выражается через K, h и h^* - собственный вектор матрицы A^T , отвечающий $\lambda = 0$. Получены уравнения и начальные условия для определения членов АР (3) решения задачи (1)- (2). Погранфункции Π определяются из системы

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FSSW-2023-0004.)

© Нестеров А.В., 2026

обыкновенных ДУ, функции «всплеска» имеют вид $S_0 = h\varphi(\zeta, t)$, где $\varphi(\zeta, t)$ определяются из уравнений в частных производных третьего порядка (линейной части уравнения Кортевега-де Фриза)

$$-\varphi_t + \tilde{K}\varphi_{\zeta\zeta\zeta} = 0, \quad (4)$$

здесь \tilde{K} выражается через данные системы (1). Уравнение (4) исследовано, в частности, в работах [4]-[9]. Оценка остаточных членов Ru, Rv в (3) сделана по невязке.

Литература

1. Васильева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978, 106 с.
2. Nesterov A. Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of hyperbolic equations / A. Nesterov arXiv:2211.17242 [math.AP]
3. Нестеров А.В. Об асимптотика решения задачи Коши для одной сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений / А.В. Нестеров // Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы Воронеж. зимн. мат. школы — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2025. — С. 253.
4. Fernandes R.S. Very singular similarity solutions and hermitian spectral theory for semilinear odd-order PDES / R.S. Fernandes, V.A. Galaktionov // arXiv:0910.4916v1 [math.AP]
5. Сергеев С. А. Асимптотические решения одномерного линеаризованного уравнения Кортевега-де Фриза с локализованными начальными данными / С. А. Сергеев // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, №3 С. 445–461
6. Roetman E. L. Some Observations About an Odd Order Parabolic Equation / E. L. Roetman E. L. // Journal of differential equations. — 1971. — №9, С. 335-345
7. Mihaela Ifrim, Herbert Koch, Daniel Ttaru Dispersive Decay Of Small Data Solutions For the KDV Equation / Mihaela Ifrim, Herbert Koch, Daniel Ttaru // arXiv:1901.05934v1 [math.AP] 17 Jan 2019
8. Lamberto Cattabriga Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple / Lamberto Cattabriga // Rendiconti del Seminario Matematico della Universit di Padova —1961. — v.31 (1961) P. 1-45

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ МАСШТАБИРОВАНИЯ

В СЛОЖНЫХ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ НА ПРИМЕРЕ МГУ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

А.Р. Нечепоренко, В.С. Зизов (Москва, МГУ)

alvadia@rambler.ru

Закон Хипса представляет собой эмпирическую закономерность в лингвистике [1]. Она описывает распределение числа уникальных слов V в документе как функцию от его длины n и задается формулой $V(n) = Kn^\beta$, а K и β – свободные параметры, определяемые эмпирически. Для английского корпуса текстов показано, что K обычно лежит между 10 и 100, а β между 0.4 и 0.6.

Последующие научные работы показали, что устойчивые эмпирические закономерности, согласующиеся с законом Хипса, наблюдаются не только в лингвистике, но и в биологических, а также в социально-экономических системах [2]. Например, в [3] было показано, что в таких системах, как бактерии, федеральные агентства, компании и университеты, разнообразие функций можно аппроксимировать степенной зависимостью от размера системы, характеризующейся сублинейными показателями от 0.35 до 0.57 в зависимости от системы.

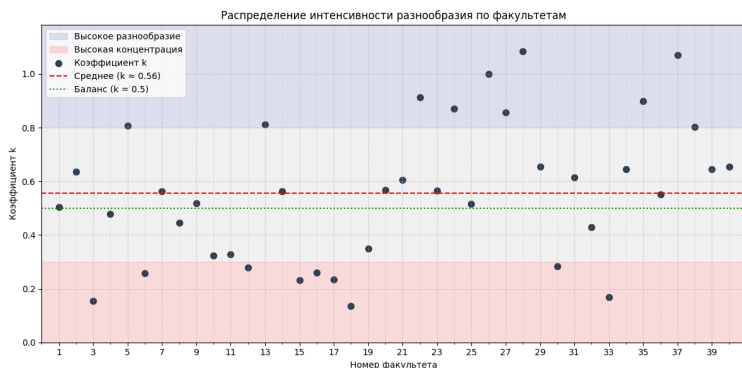


Рис. 1: Распределение коэффициента разнообразия k по факультетам МГУ им. М.В. Ломоносова.

Так, для зарубежных высших учебных заведений, принимавших участие в исследовании, данный параметр находился в диапазоне 0.50 – 0.59 [3].

Настоящая работа впервые демонстрирует количественное исследование структуры 40 факультетов МГУ им. М.В. Ломоносова в рамках закона Хипса. Выявлена вариативность коэффициента разнообразия на уровне факультетов, и установлено, что значение по университету превышает стандартное (при $\beta \approx 0.5$), достигая 0.56. Данные о преподавательском составе были представлены из системы «ИСТИНА» МГУ им. М.В. Ломоносова.

Цель работы – проверка применимости закона Хипса к образовательной структуре МГУ имени М.В. Ломоносова. Размер системы N определен как численность преподавательского состава, а разнообразии функций V – как количество образовательных программ бакалавриата и магистратуры.

Рассмотрим процедуру вычисления показателя k разнообразия с применением формулы Хипса на примере Экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Количество программ бакалавриата и магистратуры, обучение по которым предлагается факультетом, равно $V = 14$, количество преподавателей составляет согласно данным системы «ИСТИНА» $N = 620$ человек. Выразив через формулу Хипса $k = \frac{V}{N^\beta}$, получим значение $k \approx 0.5622$.

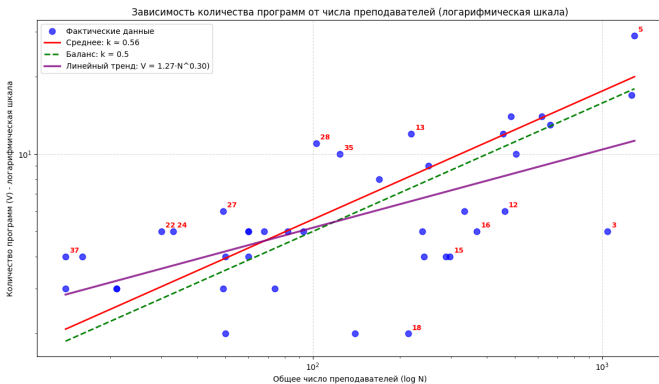


Рис. 2: Соотношение k и N , показывающее линейный тренд в логарифмической шкале.

Анализ параметров 40 факультетов МГУ им. М.В. Ломоносова показал, что средний коэффициент k по выборке составил 0.56, что подтверждает развитие университета как типичной сложной социально-экономической системы. Установленное значение соответствует мировым стандартам для высшей школы.

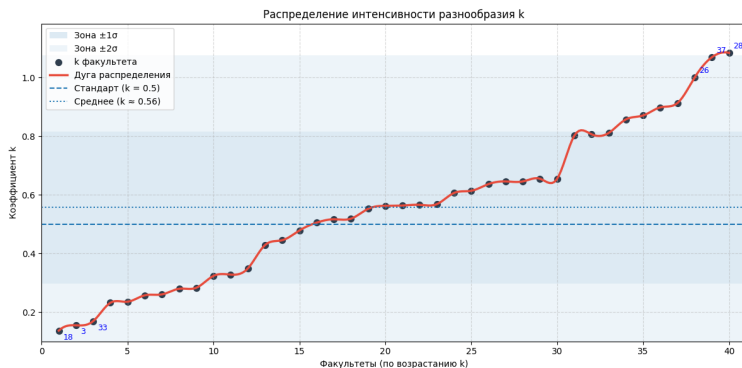


Рис. 3: Дуга распределения k .

Рост количества уникальных функций замедляется по мере роста самой структуры, что соответствует общим масштабным закономерностям, наблюдаемым в сложных системах различной природы [4].

Литература

1. H.S. Heaps, Information retrieval, computational and theoretical aspects // Academic Press, Inc. — 1978
2. M.E.J. Newman, Power laws, Pareto distributions and Zipf's law // Contemporary Physics — 2005 — V. 46 — p. 323–351
3. Vicky Chuqiao Yang, James Holehouse, Hyejin Youn, Jose Ignacio Arroyo, Sidney Redner, Geoffrey B. West, Christopher P. Kempes Scaling laws for function diversity and specialization across socioeconomic and biological complex systems// PNAS — February 12, 2026 — 123 (7) — <https://doi.org/10.1073/pnas.2509729123> doi:10.1073/pnas.2509729123
4. G. West, Scale: The Universal Laws of Life, Growth, and Death in Organisms, Cities, and Companies // Weidenfeld & Nicolson — 2017

О РЕШЕНИЯХ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

В ДВУМЕРНОЙ ДРЕЙФО-ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ ПОЛУПРОВОДНИКА СУБДЕБАЕВСКИХ РАЗМЕРОВ¹

Е.И. Никулин, А.В. Карамышев

(Москва, МГУ им. М.В. Ломоносов)

nikulin@physics.msu.ru

В настоящей работе исследуются стационарные решения с пограничными слоями сингулярно возмущённой системы тихоновского типа, возникающей в двумерной дрейфо-диффузионной модели полупроводников с субдебаевскими размерами:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon^2 (\mathbf{A}(u, x), \nabla u) - g(u, v, x, \varepsilon) &= 0, \\ \Delta v - (\mathbf{B}(v, x), \nabla v) - f(u, v, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in D,\end{aligned}\tag{1}$$

с граничными условиями Дирихле как на внутренней границе Γ , так и на внешней границе Γ^* двусвязной области D . Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Построено асимптотическое приближение решения с пограничными слоями. С использованием асимптотического метода дифференциальных неравенств доказаны существование и асимптотическая устойчивость по Ляпунову стационарных решений.

В качестве физического приложения рассматривается дрейфо-диффузионная модель полупроводника при условии, что размер образца меньше дебаевской длины. Малый параметр представляет собой отношение коэффициентов подвижности дырок и электронов. Модель приводится к виду (1), и показывается, что она удовлетворяет всем необходимым предположениям. Для радиально-симметричного случая получены явные асимптотические формулы нулевого порядка для концентраций носителей заряда.

Литература

1. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.
2. Nefedov N.N. Existence and stability of stationary solutions with boundary layers in a system of fast and slow reaction-diffusion-advection equations with KPZ nonlinearities / N.N. Nefedov, A.O. Orlov // Theoret. and Math. Phys. — 2024. — Vol. 220, No. 1. — P. 137–153.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, (проект № 25-71-10024,).

© Никулин Е.И., Карамышев А.В., 2026

3. Karamyshev A.V. Existence and stability of stationary solutions with boundary layers in a Tikhonov-type system arising in the drift-diffusion model of semiconductors of sub-Debye length / A.V. Karamyshev, E.I. Nikulin // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2025. — Vol. 32, No. 12. — P. 713–727.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДИСКРИМИНАНТНОГО ОПЕРАТОРА¹

В.А. Никишов (Москва, МГУ)

nikishov1999@yandex.ru

Рассматривается уравнение

$$y' = (y - \alpha(x))^2 - c^2/4. \quad (1),$$

где $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in C(\mathbb{R})$ и $c > 0$. Оно является частным случаем уравнения

$$y' = (y - \alpha_1(x))(y - \alpha_2(x)), \quad (2)$$

где $\alpha_{1,2}(\cdot)$ — такие непрерывные комплексно-значные функции, что $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ и $\alpha_1 + \alpha_2$ являются вещественно-значными функциями. Уравнение (2) изучалось в работах [1]–[4]. Определение типа для уравнения (2) с корнями правой части, имеющими различные конечные пределы как на $+\infty$, так и на $-\infty$, было введено в [1].

Теорема 3. [1, Т. 3] *Если $\alpha \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha \equiv \alpha^\pm \in \mathbb{R}$, то существует такое $c^* \equiv c^*(\alpha') \in [0, \sup_{x \in \mathbb{R}} \alpha(x) - \inf_{x \in \mathbb{R}} \alpha(x)]$, что:*

- при $c \in (c^*, +\infty)$ уравнение (1) имеет 1-й тип;
- если $c^* \neq 0$, то при $c = c^*$ уравнение (1) имеет 2-й тип;
- при $c \in (0, c^*)$ уравнение (1) имеет 3-й тип.

Определение 2. [1, опр. 3] Обозначив через $RC(\mathbb{R})$ пространство непрерывных интегрируемых на числовой прямой (в несобственном римановском смысле) вещественно-значных функций, определим *дискриминантный оператор* $D : RC(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, значение которого на функции $\beta = \alpha' \in RC(\mathbb{R})$ есть $c^*(\alpha')$.

Введённый таким образом *дискриминантный оператор* позволяет при некоторых дополнительных ограничениях определить тип более общего уравнения (2).

Теорема 3. *Дискриминантный оператор $D : RC(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:*

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 25-11-00133).
© Никишов В.А., 2026

- 1) если $\beta \in RC(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $D(k\beta) = k \cdot D\left(\frac{1}{k}\beta\left(\frac{\cdot}{k}\right)\right)$;
- 2) если $\beta_1, \beta_2 \in RC(\mathbb{R})$ и $\beta_1(x) < \beta_2(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то $D(\beta_1) \geq D(\beta_2)$;
- 3) если $\beta \in RC(\mathbb{R})$, то $D(\beta) \leq \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \int_{x_1}^{x_2} \beta(x) dx$;
- 4) если $\beta \in RC(\mathbb{R})$ ограничена снизу, то

$$D(\beta) \leq 2\sqrt{\max\left(\sup_{x \in \mathbb{R}}(-\beta(x)), 0\right)}.$$

Литература

1. Астахова И.В. О зависимости продолжаемости и асимптотических свойств решений уравнения Риккати от корней его правой части / И.В. Астахова, В.А. Никишов // Дифференциальные уравнения, 2026. — Т. 62, № 4. — С. 14–20.
2. Астахова И.В. О продолжаемости и качественных свойствах решений уравнения Риккати / И.В. Астахова, В.А. Никишов // УМН, 2024. — Т. 79, № 2(476). — С. 3–42.
3. Палин В.В. О поведении стабилизирующихся решений для уравнения Риккати / В.В. Палин, Е.В. Радкевич // Тр. семин. им. И.Г. Петровского, 2016. — Т. 31. — С. 110–133.
4. Bertolino M. Sur une synthese pratique de deux methodes qualitatives d'etude des equations differentielles / M. Bertolino // Mat. Vesnik, 1976. — 13(28):1. — P. 9–19.
5. Зеликин М. И. Однородные пространства и уравнение Риккати. — М. : ФАКТОРИАЛ, 1998. — 350 с.

О СБАЛАНСИРОВАННЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ С ЖЕСТКИМИ ПРИОРИТЕТАМИ НА ДУГАХ

П. Нитунга (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
nituprotais@gmail.com

В контексте возрастающей сложности и взаимозависимости современных систем управления ресурсами возникает необходимость в разработке динамических моделей, способных адекватно описывать и оптимизировать процессы распределения ограниченных ресурсов.

Рассмотрим ресурсную сеть $G(X, U)$, на множестве дуг которой задана функция $p : U \rightarrow N$. Будем считать, что функция p для

каждой вершины x задаёт приоритеты выходящих из неё дуг при распределении ресурса для формирования ресурсных потоков. При этом выполняются следующие условия:

- чем меньше значение функции p , тем выше приоритет дуги;
- для каждой вершины имеет место соотношение $|p([x]^+)| = \max_{u \in [x]^+} \{p(u)\}$.

Введём следующие обозначение: $[x]_i^+ = \{u \in [x]^+ | p(u) = i\}$ – множество дуг приоритета i , выходящих из вершины x .

Состояния ресурсной сети $Q(t) = (q_{x_1}(t), \dots, q_{x_n}(t))$, $q_x(t) \geq 0 \forall x \in [1; n]_Z$ определяются по заданному начальному состоянию сети $Q(0)$ согласно следующим правилам функционирования сети:

$$q_x(t+1) = q_x(t) - \sum_{y \in \Gamma(x)} F_{xy}(t) + \sum_{y \in \Gamma^-(x)} F_{yx}(t),$$

где F_{xy} – величина ресурсного потока выходящего по дуге (x, y) в момент времени t определяется по правилу:

положим $\varphi_x = 0$. Для каждого $i \in [1, \max\{p(u)\}]_N$ последовательно выполняем следующие шаги:

1. полагаем $\tilde{q}_x = q_x - \varphi_x$
2. для каждой вершины $y \in \Gamma(x)$ такой, что $p((x, y)) = i$ определяем:

$$F_{xy} = \begin{cases} r_{xy}, & \tilde{q}_x > (r_x^{out})_i \\ \frac{r_{xy}}{(r_x^{out})_i} \cdot \tilde{q}_x, & \tilde{q}_x \leq (r_x^{out})_i \end{cases}$$

3. полагаем $\varphi_x ::= \varphi_x + \sum_{y \in \Gamma(x)} F_{xy}$, затем увеличиваем i на единицу и возвращаемся к шагу 1.

Рассмотрим семейство частичных подсетей $\{G_i(X, U_i)\}$ ресурсной сети G , где $U_i = \{u \in U | p(u) = i\}$ множество дуг, обладающих приоритетом i .

Исходная сеть G называется сбалансированной, если для каждой частичной сети G_i в каждой её вершине x выполняется условие баланса: $(r_x^{out})_i = (r_x^{in})_i \forall i \in [1; r]_N$.

Пусть $W = \sum_{x \in X} q_x(0)$ – суммарное количество ресурса в сети,

$P = \max_{u \in U} \{p(u)\}$ и пусть $\tilde{G}_i = \bigcup_{k=1}^i G_k$, тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если для каждого приоритета i сеть G_i является сильно связной, то существует последовательность пороговых значений $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_P$ такая, что при $T_{i-1} \leq W \leq T_i$, то

1. $F_u^* = 0$, если $p(u) > i$;

2. $F_u^* = r_u$, если $p(u) < i$;

3. Предельное состояние Q^* в сети G может быть представлено в виде суммы $Q^* = Q_{i-1}^* + Q_i^*$, где Q_{i-1}^* — предельное состояние в подсети \tilde{G}_{i-1} при распределении ресурса величины T_{i-1} , а Q_i^* — предельное состояние в подсети G_i при распределении ресурса величины $W - T_{i-1}$.

Теорема 2. Пусть T — пороговое значение в сети G без учёта приоритетов, тогда $T_P = T$.

Теорема 3. Пусть $W > T_r$. Состояние Q^* является предельным состоянием для $Q(0)$ в сбалансированной ресурсной сети G с приоритетами на дугах тогда и только тогда, когда Q^* является предельным для $Q(0)$ в сети G без учёта приоритетов.

Литература

1. Жилиякова Л.Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах / Л.Ю. Жилиякова // Управление большими системами. — 2013. — № 43. — С. 34–54.

2. Скороходов В.А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети / В.А. Скороходов // Управление большими системами: сборник трудов. — 2016. — № 63. — С. 6–23.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ТИПА ФРОНТА ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИЯ-ДИФфуЗИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФфуЗИЕЙ¹

А.О. Орлов, А.Р. Махмудов (Москва, МГУ)

makhmudov.ar21@physics.msu.ru, orlov.andrey@physics.msu.ru

В работе исследуется динамика контрастной структуры типа «ступенька» (движущегося фронта) для сингулярно возмущенного параболического уравнения с нелинейной диффузией. Модели такого типа находят широкое применение в задачах популяционной динамики и нелинейной теории теплопроводности. Рассматривается

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 25-71-10024).
© Махмудов А.Р., Орлов А.О., 2026

начально-краевая задача:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u, x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x, \varepsilon), & x \in (-1, 1), t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x, \varepsilon), & x \in [-1, 1], \end{cases}$$

Центральной задачей работы является построение асимптотического приближения решения и вывод закона движения фронта. Предполагается, что для всех $x \in [-1, 1]$ вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет два устойчивых $\varphi^{(\pm)}(x)$ и один неустойчивый корень. В отличие от сбалансированного (критического) случая, изученного в [2], здесь рассматривается некритический (несбалансированный) режим:

$$\int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u, x, 0) D(u, x, 0) du \neq 0, x \in [-1, 1].$$

Методом пограничных функций А. Б. Васильевой построено асимптотическое приближение решения произвольного порядка точности. Условие гладкого сшивания асимптотических приближений по обе стороны фронта в главном порядке приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для положения фронта. Скорость фронта в главном приближении явно выражается через интегральную характеристику, зависящую от нелинейных функций реакции и диффузии.

Ключевым этапом работы является исследование задачи, определяющей нулевой член асимптотического приближения. Зависимость коэффициента диффузии от искомой функции делает рассматриваемую задачу существенно нелинейной. Однако специальное преобразование из [3] позволяет перенести нелинейность, связанную с диффузией, в правую часть уравнения и свести задачу к ранее изученному случаю.

С помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств Н. Н. Нефедова доказаны существование и единственность решения, а также получена оценка точности построенного асимптотического приближения. Результаты работы позволяют аналитически описывать динамику контрастных структур и служат основой для построения эффективных численно-асимптотических методов решения жестких параболических задач.

Литература

1. Махмудов А. Р. Формирование фронта в задаче реакция–диффузия с нелинейной диффузией / А. Р. Махмудов, А. О. Орлов, В. Т. Волков // Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНТИ, М., (2025) 243, С. 56–62.
2. Орлов А. О. Движение фронта в задаче реакция–диффузия в случае баланса реакции и диффузии / А. О. Орлов, А. Р. Махмудов // ТМФ (2025) 224, № 1, с. 181–195.
3. Волосов К. А., Математическое моделирование технологических процессов изготовления / К. А. Волосов, В. Г. Данилов, В. П. Маслов // БИС: Учеб. пособие, МИЭМ, М., 1984, 131 с.

ДВИЖЕНИЕ РЕЗКОГО ФРОНТА В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ¹

А.О. Орлов, А.Р. Махмудов (Москва, МГУ имени
М.В. Ломоносова)

orlov.andrey@physics.msu.ru

Работа посвящена исследованию начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения типа «реакция–диффузия–адвекция». Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon A(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} - f(u, x, \varepsilon) = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T],$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pm 1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in [0, T], \quad u(x, 0, \varepsilon) = u_{\text{init}}(x, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1].$$

Исследуется динамика решения, имеющего вид резкого фронта. Это означает, что существенное изменение профиля решения локализовано в узкой окрестности кривой $x^*(t, \varepsilon)$ на пространственном масштабе порядка ε^3 . Для описания профиля фронта вводится растянутая переменная

$$\xi = (x - x^*(t, \varepsilon))/\varepsilon^3.$$

Данная особенность качественно отличает рассматриваемую задачу от классического случая (см., например, [1]), где ширина внутреннего переходного слоя имеет порядок ε . В исследуемой постановке специфический баланс слагаемых в уравнении приводит к формированию существенно более узкого («резкого») фронта.

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

Предполагается, что начальное условие представляет собой контрастную структуру типа «ступенька». Подобные задачи возникают при моделировании процессов в активных средах (теория горения, химическая кинетика, физика полупроводников, популяционная динамика), где наблюдается распространение волн переключения между устойчивыми состояниями.

В работе построено асимптотическое приближение решения методом пограничных функций А. Б. Васильевой. Выведено уравнение, определяющее скорость движения фронта в главном порядке. Существование и единственность решения обоснованы с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств Н. Н. Нефедова.

Литература

1. Божевольнов Ю.В. Движение фронта в параболической задаче реакция–диффузия / Ю.В. Божевольнов, Н.Н. Нефедов // ЖВМ и МФ. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 276–285.

2. Orlov A.O. Development of methods for asymptotic analysis of moving fronts for the reaction–diffusion–advection equations / A.O. Orlov, V.T. Volkov // RJMP. — 2025. — Vol. 32, no. 4. — P. 803–817.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АСИММЕТРИЧНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ–АДВЕКЦИЯ¹

А.О. Орлов, Сюн Чжусюань, Ли Чжицян, В.Т. Волков

(Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)

orlov.andrey@physics.msu.ru

Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения реакция–диффузия–адвекция в полосе

$$\varepsilon^4 \Delta u = \varepsilon (\vec{A}(u, x, y, \varepsilon), \vec{V})u + B(u, x, y, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, a),$$

с граничными условиями

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x), \quad u(x, a, \varepsilon) = u^a(x)$$

и условием периодичности по переменной x .

Функции $\vec{A}(u, x, y, \varepsilon) = \{A_1(u, x, y, \varepsilon), A_2(u, x, y, \varepsilon)\}$ и $B(u, x, y, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими, $0 < \varepsilon \ll 1$. Цель работы состоит в

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

© Орлов А.О., Чжусюань Сюн, Чжицян Ли, Волков В.Т., 2026

построении и обосновании асимптотического приближения решения сформулированной задачи.

Особенностью задачи является сочетание различных масштабов диффузии и адвекции: коэффициент диффузии имеет порядок $O(\varepsilon^4)$, а адвекция — порядок $O(\varepsilon)$, что приводит к появлению качественно новых эффектов в решении и требует существенной модификации стандартных методик исследования. Показано, что при указанном сочетании диффузии и адвекции возникают разномасштабные пограничные слои: у границы $y = 0$ формируется слой толщины $O(\varepsilon^3)$, а у границы $y = a$ — слой толщины $O(\varepsilon)$.

Предполагается, что вырожденное уравнение

$$B(u, x, y, 0) = 0$$

имеет корень $u = \varphi(x, y)$, причем выполнены условия

$$B_u(\varphi(x, y), x, y, 0) > 0, \quad x \in R, \quad y \in [0, a],$$

$$A_2(\varphi(x, 0), x, 0, 0) < 0, \quad A_2(\varphi(x, a), x, a, 0) < 0, \quad x \in R.$$

Асимптотическое приближение строится методом пограничных функций в виде

$$U(x, y, \varepsilon) = \bar{u}(x, y, \varepsilon) + L\left(\frac{y}{\varepsilon^3}, x, \varepsilon\right) + R\left(\frac{a-y}{\varepsilon}, x, \varepsilon\right),$$

где \bar{u} — регулярная часть, а функции L и R описывают пограничные слои у нижней и верхней границ соответственно. Для регулярной части получается последовательность алгебраических задач, а для пограничных функций — краевые задачи на полупрямой с экспоненциальным убыванием на бесконечности.

Основной результат состоит в том, что при достаточно малых ε существует решение $u(x, y, \varepsilon)$ рассматриваемой задачи, для которого построенное асимптотическое приближение $U_n(x, y, \varepsilon)$ является равномерным в области $x \in R, y \in [0, a]$:

$$|u(x, y, \varepsilon) - U_n(x, y, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1}.$$

Обоснование проводится асимптотическим методом дифференциальных неравенств Н.Н. Нефедова. Однако, стандартная схема этого метода требует существенной модификации из-за асимметрии масштабов пограничных слоев.

Кроме того, доказаны локальная единственность и асимптотическая устойчивость стационарного решения как решения соответствующей начально-краевой задачи.

Литература

1. Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М.: Высшая школа, 1990. — 210 с.
2. Нефедов Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвекция: теория и применение // ЖВМ и МФ. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2074–2094.

ФОРМУЛА ТИПА АТЬИ-БОТТА-ЛЕФШЕЦА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ К ОПЕРАТОРАМ С ГРУППАМИ СДВИГОВ¹

Н.Р. Орлова, А.Ю. Савин (Москва, РУДН)
izvarinanat@gmail.com, a.yu.savin@gmail.com

В настоящей работе получена формула типа Атьи-Ботта-Лефшеца (далее АБЛ) в абстрактной ситуации. На гладком замкнутом многообразии M рассматривается коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C^\infty(M, E_0) & \xrightarrow{D_0} & \dots & \xrightarrow{D_{m-1}} & C^\infty(M, E_m) & \longrightarrow & 0 \\
 & & T_0 \downarrow & & & & T_m \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C^\infty(M, E_0) & \xrightarrow{D_0} & \dots & \xrightarrow{D_{m-1}} & C^\infty(M, E_m) & \longrightarrow & 0,
 \end{array}$$

где строки — комплексы, состоящие из непрерывных операторов, действующих в пространствах гладких сечений комплексных векторных расслоений E_j , вертикальные отображения также предполагаются непрерывными. Мы не делаем никаких предположений о природе операторов в комплексе и операторов, задающих эндоморфизм комплекса. Предполагается только, что комплекс имеет параметрикс с точностью до операторов с гладким ядром. Это обеспечивает конечность когомологий $\mathcal{H}^j = \ker D_j / \operatorname{im} D_{j-1}$.

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания (проект FSSF-2026-0013).

© Орлова Н.Р., Савин А.Ю., 2026

Определяется число Лефшеца эндоморфизма

$$L(T, D) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \operatorname{tr} \tilde{T}_j,$$

где $\tilde{T}_j : \mathcal{H}^j \rightarrow \mathcal{H}^j$ — действие эндоморфизмов в когомологиях. Далее накладывается геометрическое условие на волновой фронт ядра Шварца этого эндоморфизма и его композиций с операторами из комплекса и его параметрикса. При этих предположениях наш основной результат, формула типа АБЛ, принимает вид

$$L(T, D) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \tau(T_j),$$

где $\tau(T_j)$ — регуляризованный след оператора T_j . При этом регуляризованный след оператора определяется как интеграл сужения его ядра Шварца на диагональ $\Delta \subset M \times M$.

В работе даются два приложения формулы (1). Во-первых, рассматриваются операторы, ассоциированные с конечной группой сдвигов на многообразии M [2]. Во-вторых, рассматриваются операторы, ассоциированные с компактной группой Ли, гладко действующей на многообразии M [3-5]. Во втором случае предполагается, что рассматриваемые операторы инвариантны относительно действия группы, а действие группы полу-свободное. Также рассматриваются геометрические эндоморфизмы соответствующих комплексов, определяемые гладким отображением $g : M \rightarrow M$, имеющим только невырожденные неподвижные точки. В случае, когда точки совпадения $g(x) = \gamma(x)$, $\gamma \in \Gamma$, являются невырожденными, получены формулы Лефшеца [6].

Литература

1. Atiyah M. F. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I / M. F. Atiyah and R. Bott // Ann. Math. —1967. —Vol. 86. —С. 374–407.
2. Antonevich A. Functional-Differential Equations. I. C^* -Theory / A. Antonevich and A. Lebedev —Harlow: Longman, 1994.
3. Sternin B. Yu. On a class of nonlocal elliptic operators for compact Lie groups. Uniformization and finiteness theorem / B. Yu. Sternin // Cent. Eur. J. Math. —2011. —Vol. 9, № 4. —С. 814–832.
4. Savin A. Yu. On the index of nonlocal elliptic operators for compact Lie groups / A. Yu. Savin // Cent. Eur. J. Math. —2011. —Vol. 9, № 4. —С. 833–850.

5. Savin A. Elliptic operators associated with groups of quantized canonical transformations / A. Savin, E. Schrohe and B. Sternin // Bull. Sci. Math. —2019. —Vol. 155. —С.141–167.

6. Orlova N. R. A formula of Atiyah–Bott–Lefschetz type and its application to operators with a finite group of shifts / N. R. Orlova and A. Yu. Savin // Russ. J. Math. Phys. —2026. —Vol. 33, № 1. —С. 129–137.

ПЕРКОЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ СЕТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ СТАНЦИЙ

В.Е. Пархоменко (Белгород, БГТУ)

vlad.parhomenko-2013@yandex.ru

Надежность электрических распределительных сетей является одной из важнейших характеристик современной энергетической инфраструктуры. При этом в реальных условиях надежность сети определяется не только техническим состоянием отдельных подстанций, но и структурой связей между ними. В связи с этим при анализе таких систем необходимо учитывать как вероятности отказов отдельных элементов [1], так и общую структуру связей между станциями сети. Поэтому естественным образом модель для вычисления надежности такой сети должна конструироваться на основе теории графов $G = \langle V, E \rangle$. В этом случае множество вершин V является множеством станций или подстанций сети, а множество ребер E описывает соединения между ними. Одна из вершин рассматривается как центральная распределительная станция, через которую обеспечивается питание остальных элементов сети. Для каждой вершины вводится вероятность безотказной работы p_j , $j \in V$ в течение фиксированного интервала времени.

Так как каждая вершина может независимо от остальных находиться либо в рабочем, либо в отказавшем состоянии, то конкретная конфигурация функционирующей сети является случайным подграфом графа G . Важной характеристикой модели является вероятность того, что между фиксированной и центральной станциями существует путь по рабочим вершинам. С точки зрения теории перколяции [2] это означает наличие протекания из вершины 0 , соответствующей центральной станции, и вершиной j любой из станций сети, что может происходить с вероятностью $P(0, j)$. Эта вероят-

ность характеризует надежность включения j -й станции в общую энергосистему.

Вычисление таких вероятностей можно осуществить перебором всех путей из вершины 0 к вершине j и вычислением $P(0, j)$ на основе набора вероятностей p_j . Однако число возможных случайных конфигураций при этом растет экспоненциально с увеличением числа вершин и поэтому такой прямой путь решения практически невозможен. Для решения необходимо создать метод, использующий конкретную структуру графа.

Для этого на графе отмечаются т.н. такие вершины сочленения, удаление каждой из которых нарушает связность графа. Если исходный граф разрезать по вершинам сочленения, то он распадается на набор блоков — подграфов. Каждый блок представляет собой более устойчивый фрагмент сети, а сами блоки соединяются между собой посредством малого числа вершин. Тогда, при расчете вероятности $P(0, j)$, вместо исследования связности вершинами всего графа G , достаточно исследовать вероятности связности в каждом из блоков. Для этого строится каркасный граф, в котором каждому блоку соответствует вершина, а связь между парой блоков определяется их общей вершиной сочленения. Такая схема позволяет выделить путь между двумя интересующими вершинами уже не в исходном сложном графе. Если две вершины (станции) находятся в разных частях графа (сети), то для сохранения связи между ними необходимо, чтобы в каждом промежуточном блоке существовал путь между входной и выходной вершинами сочленения. Поэтому вероятность наличия пути определяется произведением вероятностей наличия путей в каждом из промежуточных блоков.

Ввиду предполагаемой малости числа вершин в каждом из промежуточных блоков, вероятность просачивания по каждому из них уже доступна вычислению в реальном времени и поэтому расчет надежности работы сети с блочной структурой существенно упрощается. При этом программа расчета надежности на основе базы данных относительно всех связей между станциями сети состоит в определении графа, описывающего сеть и массива вероятностей безотказной работы станций. Программа определяет вершины сочленения вместе с выделением блоков, а затем вычисляет вероятности связности внутри каждого из них. Таким образом, наличие блочной структуры у сети электроподстанций дает возможность создания относительно простого метода расчета надежности ее работы.

Литература

1. Тараканов К.В. Аналитические методы исследования систем / К.В. Тараканов. Москва: Советское радио, 1974. — 240 p.
2. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians / H. Kesten. — New York: Springer Science+Business Media, 1982. — 424 p.

О РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА

М.С. Пастухов, В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)

ritson67@outlook.com, rykhlovvs@yandex.ru

Рассмотрим начально-граничную задачу (НГЗ) с граничными условиями типа Дирихле-Неймана

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} - q(x)u = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

где $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, функции, $q(x)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ комплекснозначные. Считаем, что $q(x) \in L_1[0, 1]$, а $f(x, t) \in L_1(Q_T)$, где $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$, $T > 0$ — любое фиксированное число (в этом случае говорим, что функция $f(x, t)$ из класса \mathcal{Q} и пишем $f(x, t) \in \mathcal{Q}$). Для частных производных используются стандартные обозначения: $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ...

Рассматривается случай гиперболического (волнового) уравнения (1), то есть выполняется условие $p_1^2 - 4p_2 > 0$.

Предполагается, что корни ω_1 и ω_2 характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$, вещественны и различны и выполняется условие

$$\omega_1 < 0 < \omega_2. \quad (4)$$

Это соответствует случаю регулярной по Биркгофу [1, с. 66–67] спектральной задачи, соответствующей НГЗ (1)–(3) (см. далее (5)).

Ранее [2,3] вторым автором рассматривалась НГЗ вида (1)–(3) с краевыми условиями типа Дирихле-Дирихле. В [2,3] можно найти подробную историю вопроса. Схема доказательства в случае краевых условия типа Дирихле -Неймана аналогична соответствующим

рассуждениям из [2,3], но возникли дополнительные проблемы, которые удалось преодолеть.

В зависимости от того, как понимается решение задачи (1)–(3), накладываются различные требования на параметры задачи.

Определение 1. Под *классическим решением* задачи (1)–(3) понимается функция $u(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$, которая

а) непрерывна вместе с $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, при этом $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$ абсолютно непрерывны и по x и по t , функции $u_{xx}(x, t)$, $u_{xt}(x, t)$ и $u_{tt}(x, t)$ из класса \mathcal{Q} и почти всюду в области Q выполняется равенство

$$u_{xt} = u_{tx},$$

б) удовлетворяет условиям (2)–(3) на границе области Q и уравнению (1) почти всюду в Q . \square

Для классического решения задачи (1)–(3) по необходимости выполняются условия (N) :

$$(N_1) \varphi(x) \in W_1^2[0, 1], \psi(x) \in W_1^1[0, 1];$$

$$(N_2) \varphi(0) = \varphi'(1) = 0 \text{ и } \psi(0) = 0.$$

Определение 2. Задачу (1)–(3), решение которой даётся определением 1 и для которой выполняются условия (N) , назовём *классической начальнo-граничной задачей*. \square

С НГЗ (1)–(3) связана следующая спектральная задача

$$L(\lambda)y = 0, \tag{5}$$

порожденная оператор-функцией $L(\lambda)$, определяемой дифференциальным выражением

$$l(y, \lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + (\lambda^2 p_2 - q(x))y$$

со спектральным параметром λ , и краевыми условиями типа Дирихле-Неймана

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y'(1) = 0.$$

Основным результатом, представленным здесь, является теорема о необходимом условии для классического решения НГЗ (1)–(3) и формула для классического решения в случае $q = 0$. Для ее формулировки введём следующие обозначения:

$$a := \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \in (0, 1), \quad \sigma := \ln_0 \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(= \ln \frac{|\omega_1|}{\omega_2} + \pi i \right),$$

$$\alpha(x, t) := \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \beta(x, t) := \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1},$$

$$\Psi(x) = \int_x^1 \psi(\xi) d\xi, \quad F(x, t) = \int_x^1 f(\xi, t) d\xi,$$

$$\check{\varphi}(x) = \begin{cases} \omega_2 \varphi\left(\frac{x}{a}\right) - (\omega_1 + \omega_2)\varphi(1), & \xi \in [0, a), \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\omega_1 \varphi\left(\frac{1-x}{1-a}\right) - (\omega_1 + \omega_2)\varphi(1) \right), & \xi \in [a, 1], \end{cases}$$

$$\hat{\Psi}(x) = \begin{cases} \Psi\left(\frac{x}{a}\right), & \xi \in [0, a); \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \Psi\left(\frac{1-x}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases}$$

$$\hat{F}(x, t) = \begin{cases} F\left(\frac{x}{a}, t\right), & \xi \in [0, a); \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} F\left(\frac{1-x}{1-a}, t\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases}$$

Пусть, как обычно, $[x]$ и $\{x\}$ есть целая и дробная части числа $x \in \mathbb{R}$, соответственно.

Теорема 1. Пусть выполняется условие (4) и функция $u_0(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) в случае $q = 0$. Тогда $\varphi(x) \in W_1^2[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(x) \in W_1^1[0, 1]$, $\psi(0) = 0$, решение $u_0(x, t)$ единственно и для него справедлива формула

$$u_0(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma[\alpha(x, t)]} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma[\beta(x, t)]} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) - \right. \\ \left. - \left(e^{\sigma\alpha(x, t)} \hat{\Psi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma\beta(x, t)} \hat{\Psi}(\{\beta(x, t)\}) \right) - \right. \\ \left. - \int_0^t \left(e^{\sigma[\alpha(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\alpha(x, t-\tau)\}, \tau) - e^{\sigma[\beta(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\beta(x, t-\tau)\}, \tau) \right) d\tau \right).$$

Постановка рассматриваемой задачи и основные идеи ее решения принадлежат Рыхлову В. С. Практическая реализация, подготовка материала и оформление осуществлены Пастуховым М. С.

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.
2. Рыхлов В.С. О решении начально-граничной задачи в полуплосе для гиперболического уравнения со смешанной производной /

В.С. Рыхлов // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2023. — Т. 226. — С. 89–107.

3. Рыхлов В.С. Обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной / В.С. Рыхлов // Современ. мат. Фундам. направл. — 2023. — Т. 69, № 2. — С. 342–363.

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ В ЗАДАЧАХ С ПРЕПЯТСТВИЕМ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТИПА

$p(x)$ -ЛАПЛАСИАНА

С.Е. Пастухова (Москва, МИРЭА – РТУ)

pas-se@yandex.ru

1. Пусть K — непустое замкнутое выпуклое множество в рефлексивном сепарабельном банаховом пространстве X и пусть X^* — двойственное пространство. Зафиксируем $h \in X^*$ и рассмотрим задачу отыскания такого элемента $u \in K$, что

$$\langle Au - h, w - u \rangle \geq 0 \quad \text{для любого } w \in K, \quad (1)$$

где через $\langle f, \varphi \rangle$ обозначаем действие функционала $f \in X^*$ на элементе $\varphi \in X$. Здесь $A : K \rightarrow X^*$ — ограниченный коэрцитивный семинепрерывный строго монотонный оператор. Задача (1) имеет единственное решение [1], её принято называть вариационным неравенством. Если K совпадает со всем пространством X , решение u вариационного неравенства автоматически удовлетворяет тождеству $\langle Au - h, w \rangle = 0$ для любого $w \in X$, которое даёт слабую постановку операторного уравнения $Au = h$.

Часто оператор A является потенциальным, т.е. A есть производная по Гато выпуклого функционала J , определённого на множестве K . В этом случае задача (1) эквивалентна минимизации на K функционала $F(v) = J(v) - \langle h, v \rangle$ и её можно изучать средствами вариационного исчисления, в частности, привлекая теорию двойственности.

Решение u задачи (1) находится явно в редких случаях. Естественен вопрос: можно ли для произвольной функции $v \in X$, претендующей на приближение к u , оценить какую-либо меру отклонения её от u лишь в терминах v и данных самой задачи? Оценки такого рода называют *апостериорными*; им посвящена обширная литература (см. [2–4] и указанную там библиографию). В качестве меры отклонения можно взять норму $\|u - v\|_X$. Тогда апостериорной

считаем оценку $\|u-v\| \leq M(v)$, $v \in X$, с мажорирующим функционалом $M : X \rightarrow \mathbb{R}$, который может зависеть от данных задачи помимо v , но не от самого решения u . Желательны также свойства

$$M(v) = 0 \iff v = u; \quad M(v) \rightarrow 0 \text{ при } v \rightarrow u \text{ в } X.$$

Наличие такой мажоранты, вычисляемой явно, позволяет оценить качество приближенного решения v , его близость к решению u .

Недостаточно изучены в плане апостериорных оценок задачи типа (1) с дифференциальным оператором A переменного порядка нелинейности, примером которого является $p(\cdot)$ -лапласиан. Этот оператор задаётся поточечным равенством $Au = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(\cdot)-2} \nabla u)$, если достаточно гладки задействованные в нём функции, в противном случае оператор вводится в слабой постановке. Оператор задачи (1) можно усложнить, переходя, как в [5], к анизотропному $p(\cdot)$ -лапласиану вида $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(\cdot)-2} \mathcal{A} \nabla u)$, где матрица $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\cdot)$ измерима, симметрична и подчинена условию типа Кордеса (которое обеспечивает строгую монотонность оператора). Анизотропный $p(\cdot)$ -лапласиан не является потенциальным оператором, для него не применим вариационный подход получения апостериорных оценок, использующий теорию двойственности. Здесь применим универсальный метод интегральных тождеств и неравенств из [6], опирающийся на монотонность задачи.

2. Сформулируем один из наших результатов, относящийся к вариационным неравенствам типа (1). Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ограничена. Фиксируем произвольную функцию $h \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ и введём множество $\mathbb{K} = \{v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) : v \geq \varphi \text{ п.в. в } \Omega\}$, где "препятствие" $\varphi \in L^1(\Omega)$ таково, что $\mathbb{K} \neq \emptyset$. Здесь $p \in L^\infty(\Omega)$, $1 < \alpha \leq p(\cdot) \leq \beta < \infty$ п.в. в Ω и использованы пространства Лебега и Соболева переменного порядка (см. [7]), причем $p'(\cdot)$ – сопряженный по Гёльдеру показатель к $p(\cdot)$. Предполагаем, что область Ω и показатель $p(\cdot)$ допускают выполнение неравенства Фридрихса вида

$$\|v\|_{p(\cdot)} \leq C_F \|\nabla v\|_{p(\cdot)} \quad \forall v \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega),$$

где $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ – норма Люксембурга в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ (см. [7]).

Рассмотрим задачу на отыскание такой функции $u \in \mathbb{K}$, что

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla (w - u) dx \geq \int_{\Omega} h(w - u) dx \quad \forall w \in \mathbb{K}. \quad (2)$$

Введём пространство вектор-функций

$$Q^* = \{\eta \in L^{p'(\cdot)}(\Omega; \mathbb{R}^N) : \operatorname{div} \eta \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)\}$$

и для произвольной функции $v \in \mathbb{K}$ рассмотрим разбиение области Ω на две части $\Omega_\varphi^v = \{x \in \Omega : v(x) = \varphi(x)\}$ и $\Omega_0^v = \Omega \setminus \Omega_\varphi^v$. Кроме того, напомним стандартное обозначение $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема. Пусть $2 \leq \alpha \leq p(\cdot) \leq \beta$ в области Ω . Тогда для решения u задачи (2) и любых $v \in \mathbb{K}$ выполнена оценка

$$\min\{\|\nabla(u-v)\|_{p(\cdot)}^{\alpha-1}, \|\nabla(u-v)\|_{p(\cdot)}^{\beta-1}\} \leq 2^{\beta-1} \inf_{\eta^* \in Q^*} (\|\tau^* - \eta^*\|_{p'(\cdot)} + C_F \|\operatorname{div} \eta^* + h\|_{p'(\cdot), \Omega_0^v} + C_F \|(\operatorname{div} \eta^* + h)_+\|_{p'(\cdot), \Omega_\varphi^v}),$$

где $\tau^* := |\nabla v|^{p(\cdot)-2} \nabla v$ и C_F – константа из неравенства Фридрикса.

Аналогичные результаты получены в случаях, когда $\alpha \leq p(\cdot) \leq \beta \leq 2$ в области Ω , либо когда $\alpha \leq p(\cdot) \leq \beta$ в области Ω , но $\alpha < 2$ и $\beta > 2$. Кроме того, в задаче (2) можно перейти к анизотропному $p(\cdot)$ -лапласиану.

Тематика апостериорных оценок для нелинейных задач с монотонными операторами, в частности, для задач с препятствием типа (2), разрабатывается совместно с В.Е. Бобковым из Института математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН (г. Уфа, РФ), см. [6].

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж.-Л. — М. : Мир, 1972. — 588 с.
2. Repin S. A posteriori estimates for partial differential equations / Repin S. — Walter de Gruyter GmbH Co. KG, Berlin, 2008. — 316 p.
3. Pastukhova S.E. A posteriori estimates for the accuracy of approximations in variational problems with power functionals / S.E. Pastukhova // J. Math. Sciences. — 2020. — V. 244, № 3. — P. 509–523.
4. Пастухова С.Е. Апостериорные оценки отклонения от точного решения в вариационных задачах с нестандартными условиями коэрцитивности и роста / С.Е. Пастухова // Алгебра и анализ. — 2020. — Т. 32, № 1. — С. 51–77.
5. Pastukhova S.E. Galerkin approximations in problems with anisotropic $p(\cdot)$ -Laplacian / S.E. Pastukhova, D.A. Yakubovich // Applicable Analysis. — 2019. — V. 98, № 1-2. — P. 345–361.
6. Бобков В.Е. Апостериорные оценки в задачах с монотонными операторами / Бобков В.Е., Пастухова С.Е. // Мат. сборник. — 2026. — Т. 217, № 4. — С. 3-41.
7. Diening L. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents / Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Ruzicka M. // — Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. — 514 p.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРКОЛЯЦИИ НА ОДНОРОДНЫХ ДЕРЕВЬЯХ КЭЙЛИ

В.С. Пашкова (Белгород, БГТУ)
valerypashkova@yandex.ru

Дискретная теория перколяции изучает наличие связности бесконечных случайных графов, порождаемых бернуллиевским случайным полем $\{\rho(x); x \in V\}$ случайных величин $\rho(x)$ со значениями $\{0, 1\}$, на множестве вершин V некоторого фиксированного бесконечного графа $G(V, \Phi)$. При этом, ввиду бесконечности графа G , для определенности постановки задачи, отношение Φ смежности его вершин должно быть сгенерировано алгоритмическим образом. Одним из классов графов с регулярной структурой являются т.н. деревья Кэйли. Они представляют собой бесконечные графы, не содержащие циклов, с одной и той же фиксированной для каждого графа степенью всех его вершин $s + 1$.

Вероятность перколяции $P(c)$, $c = \Pr\{\rho(x) = 1\}$ из вершины $x \in V$ графа, которая в случае деревьев Кэйли не зависит от x , есть вероятность события наличия бесконечного несамопересекающегося пути из этой вершины на множестве $\{y : \rho(y) = 1\}$. На дереве Кэйли степени $s + 1$ она представляется в виде $P(c) = c(1 - Q^{s+1}(c))$, где $Q(c)$ — условная вероятность отсутствия бесконечного пути из вершины x с некоторым фиксированным начальным ребром $\{x, y\} \in \Phi$, соединяющим x со смежной вершиной y .

В случае деревьев Кэйли вероятность $Q(c)$ является неявной функцией со значениями в $[0, 1]$, определяемой как решение уравнения

$$Q(c) = 1 - c + cQ^s(c).$$

Имеется не более двух решений, удовлетворяющих этим условиям, одно из которых равно 1, а второе собственно существует при $c > c_*$, где c_* — т.н. порог перколяции, определяет наличие перколяции с ненулевой вероятностью $P(c)$. Это решение выделяется условием непрерывности функции $Q(c)$ в точке $c = 1$, где она обязана быть равной нулю.

Порог перколяции на деревьях Кэйли равен $c_* = s^{-1}$. Например, в случае, если $s = 2$ и $s = 3$, вероятность $Q(c)$ дается явными

формулами, в первом случае

$$Q(c) = \frac{1-c}{c}$$

при $c > 1/2$, и во втором —

$$Q(c) = -\frac{1}{2} \left(1 - (4/c - 3)^{1/2} \right)$$

при $c > 1/3$. В этих случаях функция $Q(c)$ выпукла, а связанная с ней функция $P(c)$ вогнута.

В работе установлен факт наличия этих качественных свойств у функций $Q(c)$ и $P(c)$ для любого значения степени s .

Теорема 1. Вероятность $Q(c)$ отсутствия перколяции с фиксированным начальным смещением из фиксированной фершины x однородного дерева Кэйли G со степенью вершин $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ на случайном множестве, порождаемом на G однородным бернуллиевским случайному полем, является непрерывной при $c \in [0, 1]$ и непрерывно дифференцируемой при $c \neq s^{-1}$ функцией от c , которая равна 1 при $c \in [0, s^{-1}]$ и монотонно убывает и выпукла при $c \in (s^{-1}, 1)$.

Теорема 2. Вероятность $P(c)$, наличия перколяции из фиксированной вершины x однородного дерева Кэйли G со степенью вершин $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ на случайном множестве, порождаемом на G однородным бернуллиевским случайному полем, является непрерывной при $c \in [0, 1]$ и непрерывно дифференцируемой при $c \neq s^{-1}$ функцией от c , которая равна 0 при $c \in [0, s^{-1}]$ и монотонно возрастает и вогнута при $c \in (s^{-1}, 1)$.

Литература

1. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians / H. Kesten. — New York: Springer Science+Business Media, 1982. — 424 p.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ¹

А.В. Перескоков (Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ)

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта государственного задания № FSWF-2026-0010.

© Перескоков А.В., 2026

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathbf{H} - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{|q - q'|} + \alpha \ln |q - q'| + U(|q - q'|) \right) |\psi(q')|^2 dq') \psi = \lambda \psi, \quad (1)$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \quad (2)$$

где

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

— двумерный осциллятор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $U = U(z)$ — непрерывно дифференцируемая при $z \geq 0$ функция, для которой справедливо разложение

$$U(z) = U_0 + \frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Здесь α, U_0, U_1, U_2 — константы. Будем предполагать, что, если число $\alpha = 0$, то $U_1 \neq -1$. Задача (1), (2) относится к классу резонансных, так как обе частоты двумерного осциллятора \mathbf{H} равны 1.

В данной работе результаты статьи [1] обобщены на уравнения более общего вида, в которых потенциал самодействия содержит одновременно кулоновский потенциал $|q|^{-1}$ и потенциал с логарифмической особенностью $\ln |q|$, а также дополнительное слагаемое $U(|q|)$, не имеющее особенностей.

Собственные значения задачи (1), (2) при $\varepsilon = 0$ равны $\lambda_n = n + 1$, $n = 0, 1, \dots$. В данной работе показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ и при величине n порядка ε^{-1} собственные значения задачи (1), (2) для $k = 0, 1, 2, \dots$ задаются асимптотической формулой

$$\lambda_{n,k}(\varepsilon) = n + 1 - \frac{\alpha \varepsilon \ln n}{2} - \varepsilon U_0 - \frac{(U_1 + 1) \varepsilon \ln n}{2\pi \sqrt{n}} - \frac{2\alpha \varepsilon \delta_k}{\sqrt{\pi n}} + \frac{\varepsilon(\sigma_k + \nu_k - 8 \ln 2 - \gamma)}{2\pi \sqrt{n}} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Разложение (3) описывает расщепление спектра. Здесь γ — постоянная Эйлера, числа σ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, определяются равенствами $\sigma_0 = 0$,

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для чисел δ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, в работе получена новая более простая формула, содержащая только биномиальные коэффициенты:

$$\delta_k = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_{1/2}^{k-j} (C_{-3/2}^j)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$C_{1/2}^0 = 1, \quad C_{1/2}^k = \frac{(1/2)(1/2 - 1) \dots (1/2 - k + 1)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$C_{-3/2}^0 = 1, \quad C_{-3/2}^k = (-1)^k \frac{(3/2)(3/2 + 1) \dots (3/2 + k - 1)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Формулы для чисел ν_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, входящих в разложение (3), приведены в [1].

Разложение (3) при $\alpha > 0$ описывает спектр оператора типа Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров, при $\alpha < 0$ — вблизи нижних границ спектральных кластеров, и, наконец, при $\alpha = 0$ и $U_1 > -1$ — вблизи нижних границ спектральных кластеров, а при $\alpha = 0$ и $U_1 < -1$ — вблизи верхних границ спектральных кластеров. Соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружности.

Литература

1. Pereskokov A.V. Semiclassical asymptotics of the spectrum of a two-dimensional Hartree type operator near boundaries of spectral clusters / A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. — 2022. — V. 264, № 5. — P. 617–632.

ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА СИЛЬНЫХ ЛЕТНИХ ОСАДКОВ И ОПАСНЫХ ШКВАЛОВ И СМЕРЧЕЙ ПО ТЕРРИТОРИИ ЦЕНТРАЛЬНОГО

И ПРИВОЛЖСКОГО ОКРУГОВ И ОСОБЕННОСТИ ИХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ В ТЕЧЕНИЕ АНОМАЛЬНО ТЕПЛЫХ СЕЗОНОВ 2024-2025ГГ

Э.В.Переходцева, Л.В Золин (Москва, РГУ МИРЭА, Москва)

Летние сезоны 2024-2025гг, как известно, на европейской части России были исключительно аномально теплыми. Положительные аномалии средней суточной температуры неоднократно достигали 7-10 и более градусов, в то время, как в предыдущие достаточно теплые годы эти аномалии составляли 5-7 градусов.

Повышение температуры Мирового океана приводит к потеплению климата и к значительному изменению в поведении атмосферных процессов, а также и к иногда непредусмотренным в прогнозе синоптиков опасным конвективным явлениям.

Наш выдающийся ученый, математик и гидромеханик, член-корреспондент АН СССР Кибель И.А. предсказывал еще в конце 50-х и в 60-х годах прошлого века, что краткосрочный численный прогноз основных элементов погоды будет осуществляться с использованием гидродинамических моделей, и синоптики уже смогут им пользоваться. Однако он предупреждал, что не так просто применить уравнения гидродинамики к прогнозу погоды, необходимо их преобразовать и понять, для каких случаев и какими слагаемыми можно пренебречь. Развитие ЭВМ с большой памятью и быстродействием позволило находить достаточно точные численные решения системы уравнений прогноза погоды.

Гидродинамические модели уже достаточно хорошо прогнозируют давление у Земли, срочную температуру воздуха через каждые 6ч у Земли и на разной высоте, скорость среднего ветра у Земли и другие метеоэлементы - атмосферные параметры, представленные в докладе в виде таблицы.

Однако неблагоприятные и опасные конвективные явления, зависящие от большого числа параметров, такие, как сильные полусуточные осадки количеством $Q > 14 \text{ мм} / 12 \text{ ч}$ и шквалы (сильные кратковременные порывы ветра с $V > 20 \text{ м} / \text{с}$ или с $V > 24 \text{ м} / \text{с}$) модели прогнозируют пока недостаточно хорошо. Предупрежденность прогноза этих явлений еще достаточно низкая, даже для сильных осадков $Q > 14 \text{ мм} / 12 \text{ ч}$ в лучшей британской модели она равна $\text{Пя} = 25-30$

Отдельно для прогноза сильных и опасных порывов ветра (шквалов) и для прогноза сильных осадков двух градаций нами были

разработаны статистические модели распознавания этих явлений на фактических выборках наличия и отсутствия этих конкретных явлений на Европейской территории России (ЕТР). Предварительно по фактическим данным был проведен отбор по нашему алгоритму наиболее информативных и мало зависимых параметров атмосферы для каждого явления и рассчитаны значения их коэффициентов в функциях распознавания $F_i(X)$, $i=1,2,3,4$. Для расчета прогноза указанных явлений с заданной заблаговременностью в полученных функциях использовались прогностические значения отобранных ранее параметров сначала из полусферной модели (автор-Беркович Л.В.), затем – из региональной модели Гидрометцентра России (автор- Лосев В.М.).

Наши гидродинамико-статистические модели прогноза сильных осадков и сильных и опасных максимальных скоростей ветра успешно прошли оперативные испытания в трех Управлениях по Гидрометслужбе, а также в Гидрометцентре России. Они были рекомендованы техсоветами Управлений и Методической комиссией Госкомгидромета для использования в оперативной практике.

В настоящее время проведено усовершенствование представления прогностических областей возникновения и явлений сильного и опасного ветра, и явлений сильных и очень сильных осадков в виде цветных карт прогноза с помощью графического пакета ИЗОГРАФ (автор- Алферов Ю.В.) Для этого в узлах декартовой сетки оперативной региональной модели Гидрометцентра России рассчитываются вероятности возникновения $P_1(X)$ и $P_2(X)$ явлений сильных и очень сильных осадков в зависимости от полученных значений дискриминантных функций $F_1(X)$ и $F_2(X)$. Для перехода к альтернативному прогнозу сильных осадков количеством $Q > 14/12ч$ выделяются области с $P_1=98$

Аналогично для перехода к альтернативному прогнозу опасных порывов ветра скоростью более 24м/с на цветной карте прогноза выбирается прогнозируемая область таких явлений по вероятности $P_3 \geq 62$

В настоящее время автоматически в системе АСООИ Гидрометцентра России ежедневно 2 раза в сутки по сроку 00ч и 12ч Всемирного метеорологического времени (ВСВ) представляются по 4 цветных карты прогноза указанных явлений для каждой заблаговременности 12,24,36,48ч. При расчете вероятностей прогноза определенной заблаговременности используются прогностические значения необходимых атмосферных параметров региональной модели. Кар-

ты выкладываются на сайт Главного Вычислительного центра Роскомгидромета, откуда их могут брать и использовать в оперативной практике синоптики всех управлений по гидрометслужбе Европейской территории России. Им разосланы соответствующие рекомендации. Также в некоторые УГМС карты передаются по электронной почте.

В последние два аномально теплых летних сезона 2024-2025 годов на ЕТР была отмечена повышенная повторяемость сильных ливневых осадков и очень сильных осадков, несмотря на продолжительные периоды существования жаркой погоды при антициклонах. При этом при появлении из Европы южных циклонов, как обычно, возникали осадки. Однако интенсивность осадков увеличилась, тк после периода сильной жары в средней тропосфере сформировался значительный слой испарившейся влаги, обрушивающейся в виде сильных ливневых осадков.

После сильной жары в ЦФО 20 июля 2025 года в Липецкой, Тамбовской областях отмечались осадки 88мм/3ч и 65мм/6ч, а 21.07.2025 в Московской области - в Коломне – 69мм/12ч, в Москве на разных станциях 49-53мм/12ч; 26.07.2025 в Воронежской, на мс Анна было отмечено 48мм/2ч. Карты прогноза будут приведены в докладе для многих случаев, как и примеры успешного прогноза и очень сильных шквалов, в частности, 9.07.25 года в Брянской и Московской областях - опасного ветра, а в Шереметьево –ветра скоростью 33м/с. Синоптиками не были предусмотрены. 20.06.24 года в Москве и области были отмечены и спрогнозированы порывы ветра скоростью 26м/с. Пострадали 7 человек, 2 погибли, повреждены 443 авто. Опасные шквалы, несмотря на небольшую продолжительность, в населенных пунктах приносят большой ущерб. Цена ошибки пропуска явления очень велика, поэтому очень важно повышение предупреденности этих явлений и одновременно повышение оценки успешности прогноза Пирси-Обухова $T=1-a-v$. У нас $T_{cp}=0,6$.

Предполагается усовершенствование выше описанных моделей для территории ЕТР и оценка синоптиками результатов оперативного прогноза по цветным прогностическим картам для территории Урала и Западной Сибири.

О НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ¹

Г.Г. Петросян (Воронеж, ВГУ)

garikpetrosyan@yandex.ru

В сепарабельном банаховом пространстве E рассматривается задача Коши для нелинейного функционально-дифференциального включения

$${}^{GC}D_0^\alpha x(t) + x'(t) \in Ax(t) + F(t, x_t), \quad t \in [0, a], \quad (1)$$

$$x(s) = \vartheta(s), \quad s \in [-h, 0], \quad (2)$$

где ${}^{GC}D_0^\alpha$ — дробная производная Герасимова-Капуто порядка $0 < \alpha < 1$, $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ — линейный замкнутый оператор (необязательно ограниченный), порождающий равномерно ограниченную C_0 -полугруппу операторов $\{T(t)\}_{t \in [0, a]}$. Многозначное отображение $F : [0, a] \times C([-h, 0]; E) \rightarrow E$ имеет выпуклые компактные значения, $x_t \in C([-h, 0]; E)$ — предыстория функции до момента $t \in [0, a]$, т.е. $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, и функция $\vartheta \in C([-h, 0]; E)$ наперед заданна. С помощью теории топологической степени уплотняющих отображений, в настоящей статье доказывается существование интегральных решений задачи (1)-(2).

Литература

1. Kilbas A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. — Amsterdam: Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, 2006.
2. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М.: Либроком, 2011. — 224 С.
3. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca P. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2001. — 232 p.
4. Afanasova M. A controllability problem for causal functional inclusions with an infinite delay and impulse conditions / M. Afanasova, V. Obukhovskii, G. Petrosyan // Advances in Systems Science and Applications. — 2021. — Vol. 21, № 3. — P. 40-62.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 23-71-10026, № 25-11-00056).

© Петросян Г.Г., , 2026

5. Афанасова М.С. Об обобщенной краевой задаче для управляемой системы с обратной связью и бесконечным запаздыванием / М.С. Афанасова, В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2021. — Т. 31, № 2. — С. 167-185.

6. Петросян Г.Г. О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием / Г.Г. Петросян, М.С. Афанасова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2017. — № 1. — С. 135-151.

7. Петросян Г.Г. Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора / Г. Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1355-1358.

8. Петросян Г.Г. О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования / Г.Г. Петросян // Вестник российских университетов. Математика. — 2020. — Т. 25, № 131. — С. 284-289.

9. Obukhovskii V. On semilinear fractional differential inclusions with a nonconvex-valued right-hand side in Banach spaces / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, V. Bocharov, C. F. Wen // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. — 2022. — Vol. 6, № 3. — P. 185-197.

10. Kamenskii M. On a controllability problem for a feedback control system governed by a semilinear differential equation and a sweeping process / M. Kamenskii, G. Petrosyan // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2024. — Vol. 132. — P. 107889.

11. Каменский М.И. О принципе усреднения для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве с отклоняющимся аргументом и малым параметром / М.И. Каменский, Г.Г. Петросян // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — Т. 204. — С. 74-84.

12. Обуховский В.В. О начальной задаче для невыпуклозначных дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве / В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян, М.С. Сорока // Математические заметки. — 2024. — Т. 115, № 3. — С. 392-407.

**ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ
ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ**
С.И. Пискарев (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, МТУСИ)

Рассмотрим в банаховом пространстве задачу Коши:

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), \quad u(0) = u^0,$$

где D_t^α – дробная производная по Капуто, а оператор A порождает C_0 -полугруппу. Эти задачи отличаются от классических тем, что гладкость начальных данных $u^0, f(\cdot)$ и оценки скорости сходимости на классах задач для разностных схем связаны специальным образом [3–5].

Решение задачи Коши (1) с $f \equiv 0$ дается α -разрешающим семейством операторов $E_\alpha(\cdot)$, которое является обобщением функции Mittag-Леффлера, и обычно его записывают $u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u^0$. Мы обозначим это семейство операторов через $S_\alpha(t, A) \equiv E_\alpha(t^\alpha A)$.

Решение задачи (1) с неоднородным уравнением записывается в виде

$$u(t) = S_\alpha(t, A)u^0 + \int_0^t P_\alpha(t-s, A)f(s)ds,$$

где

$$(\lambda^\alpha I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_\alpha(t, A)x dt,$$

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t, A)x dt$$

для любых $Re \lambda > \omega, x \in E$.

Мы рассмотрим как полудискретизацию, так и полную дискретизацию задачи (1). При этом дискретизация по времени будет дана как для L_1 схемы [1,2], так и для неравномерной сетки.

Литература

1. Li Liu. Convergence Rates of a Finite Difference Method for the Fractional Subdiffusion Equations. / Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev Sergey // Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer Cham Switzerland. —2023. — V. 423, PP. 89-113.

2. Li Liu. Discrete almost maximal regularity and stability for fractional differential equations in $L^p([0, 1], \Omega)$. / Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev S. // Applied Mathematics and Computation. —2021. — V. 389, Article 125574.

3. Piskarev S. Unstable manifolds for fractional differential equations. /Siegmond S. // Eurasian journal of mathematical and computer applications. —2022. — V. 10, PP. 58 – 72.

4. Piskarev S. Attractors, shadowing and approximation of abstract semilinear differential equations. / A. Ovchinnikov. // World Scientific, 2023. 204 pp.

5. Пискарев С.И. Затенение в окрестности гиперболической стационарной точки для дробных уравнений. Прикладная математика & Физика. —2025, V. 57, № 1. — С. 41–51.

**АНАЛИЗ НИЗКОЧАСТОТНОГО СПЕКТРА ЗАДАЧИ
ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ
ГРАФЕ В ФОРМЕ СЕТКИ**

А.А. Поздняков (Воронеж, ВГУ)
AndAlexPozdnyakov@yandex.ru

Рассматривается сетка из струн с квадратными ячейками, натянутая в плоскости xOy и закреплённая по контуру квадрата $Q = [0; l] \times [0; l]$. К внутренним узлам сетки прикреплены грузы одинаковой массы m_h ; струны обладают постоянной плотностью ρ_h и имеют постоянное натяжение σ_h . Данная механическая система моделируется с помощью геометрического графа $G_h = V \cup E^H \cup E^V$, где V - множество вершин графа, E^H и E^V — множества горизонтальных и вертикальных рёбер. Множество граничных вершин обозначим через ∂G_h . Квадраты частот собственных колебаний этой системы являются собственными значениями следующей задачи Штурма-Лиувилля на графе G_h :

$$\sigma_h u''(x) + \lambda \rho_h u(x) = 0 \text{ при } x \in (E^H \cup E^V), \quad (1)$$

$$\sum_{i,j \in I(v_{ij})} \sigma_h u'_{v_{ij}}(v_{ij}) + \lambda m_h u(v_{ij}) = 0 \text{ при } v_{ij} \in V, \quad (2)$$

$$u|_{\partial G_h} = 0. \quad (3)$$

При достаточно малых размерах ячеек h данная механическая система близка по своим свойствам к мембране, растянутой в квадрате $Q = [0, l] \times [0, l]$, если выполняются условия $\rho = \frac{2\rho_h h + m_h}{h^2}$, $\sigma = \frac{\sigma_h}{h}$. Пусть общая масса систем является постоянной величиной, тогда верно соотношение $2\rho_h h + m_h = \rho h^2 = const$.

Собственные значения задачи (1) - (3) удовлетворяют уравнениям

$$2 \cos \left(\frac{\pi h}{l} i \right) + 2 \cos \left(\frac{\pi h}{l} j \right) = 4 \cos \left(h \sqrt{\lambda \frac{\rho_h}{\sigma_h}} \right) - m_h \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_h \sigma_h}} \sin \left(h \sqrt{\lambda \frac{\rho_h}{\sigma_h}} \right); \quad (4)$$

$$\left(\sin \left(h \sqrt{\lambda \frac{\rho_h}{\sigma_h}} \right) \right)^{n^2-1} = 0. \quad (5)$$

Интерес представляет анализ уравнения (4), описывающего низкочастотную часть спектра. Неявное дифференцирование показывает, что $\lambda_{ij}(\rho_h)$ строго возрастает на интервале $\left(0, \frac{\rho_h}{2}\right)$. При $\rho_h = \frac{\rho_h}{2}$ собственные значения задаются выражением $\lambda_{ij} \left(\frac{\rho_h}{2} \right) = \frac{\sigma \pi^2}{\rho l^2} (i^2 + j^2) + O(h^2)$, что соответствует выражению, описывающему спектр колебаний квадратной мембраны с точностью до членов порядка h^2 . Причём при $(i = j)$ погрешность отсутствует совсем. При $\rho_h = 0$

получаем выражение $\lambda_{ij}(0) = \frac{4\sigma \left(\sin^2 \left(\frac{\pi h}{2l} i \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi h}{2l} j \right) \right)}{\rho h^2}$, которое совпадает со спектром разностного оператора Лапласа.

Таким образом, спектр задачи (1) - (3) при любом распределении линейной плотности ρ_h заключён между известными значениями, которые аппроксимируют спектр задачи о колебаниях мембраны. Этот факт служит обоснованием того, что задача (1) - (3) является эффективной редукционной моделью для задачи о собственных колебаниях мембраны.

Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. — М. : Физматлит, 2005. — 272 с.
2. Курант Р. Методы математической физики. Т. 1 / Курант Р., Гильберт Д.; М. ; Л. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. — 476 с.
3. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / Самарский А.А. — М. : Наука, 1971. — 552 с.
4. Wilhelmus H.A. Schilders. Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications / Wilhelmus H.A. Schilders, Henk A. van der Vorst, Joost Rommes. — 2008. — XI, 471 p.

5. Kaldybekova B.K. A numerical solution of the membrane eigenproblem by the model order reduction / B. K. Kaldybekova, G. V. Reshetova // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — Т. 14. — С. 1088–1099.

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ФРИДРИХСА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА¹

Л.В. Провоторова (Москва, НИУ МЭИ)

prolubov2000@yandex.ru

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ . Рассмотрим ортогональное разложение пространства $\vec{W}_2^1(G)$ на два подпространства, порождаемых нормированным векторным полем $\vec{\Phi}(x)$ и связанным с ним полем $\vec{\Psi}(x)$, удовлетворяющим на границе условиям $\vec{\Phi}|_\Gamma = \vec{\tau}$, $\vec{\Psi}|_\Gamma = \vec{n}$, где $\vec{\tau}$ и \vec{n} — касательный и нормальный векторы к границе Γ . С данным разложением естественным образом связаны линейные непрерывные вектор-функционалы следа

$$\vec{u} \rightarrow \int_\Gamma (\vec{u}|_\Gamma, \vec{\tau}) \vec{\tau} d\gamma, \quad \vec{u} \rightarrow \int_\Gamma (\vec{u}|_\Gamma, \vec{n}) \vec{n} d\gamma,$$

ядра которых образуют подпространства

$$\vec{W}_{2,\tau\text{-ort}}^1(G; \Gamma) = \left\{ \vec{u} \in \vec{W}_2^1(G) \mid \int_\Gamma (\vec{u}|_\Gamma, \vec{\tau}) \vec{\tau} d\gamma = 0 \right\}$$

и аналогично $\vec{W}_{2,n\text{-ort}}^1(G; \Gamma)$.

Лемма. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ . Тогда для любой вектор-функции $\vec{u} \in \vec{W}_2^1(G)$ справедливо неравенство

$$\int_G |\vec{u}|^2 dx \leq M \left(\int_G |\nabla \vec{u}|^2 dx + \left| \int_\Gamma (\vec{u}|_\Gamma, \vec{\tau}) \vec{\tau} d\gamma \right|^2 \right),$$

где $M > 0$ — постоянная.

Очевидно, что на пространстве $\vec{W}_{2,\tau\text{-ort}}^1(G; \Gamma)$ заявленное в Лемме неравенство принимает более простой вид, то есть для любой

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта государственного задания FSWF-2026-0010.

© Провоторова Л.В., 2026

вектор-функции $\vec{u} \in \vec{W}_{2,\tau-\text{ort}}^1(G; \Gamma)$ справедливо неравенство

$$\int_G |\vec{u}|^2 dx \leq M \int_G |\nabla \vec{u}|^2 dx,$$

где $M > 0$ — постоянная.

На основе неравенства, установленного в Лемме, доказывается корректность интегральных тождеств

$$\int_G (\nabla \vec{u}, \nabla \vec{v}) dx = \int_G (\vec{h}, \vec{v}) dx$$

на каждом из указанных подпространств при условии $\vec{h} \in \vec{L}_2(G)$.

Полученные результаты применяются для доказательства корректной разрешимости системной задачи Неймана

$$\begin{cases} -\Delta \vec{u}(x) = \vec{h}(x), & x = (x_1, x_2) \in G, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

а именно, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ . Для любой вектор-функции $\vec{h} \in \vec{L}_2(G)$, удовлетворяющей условию $\int_G (\vec{h}, \vec{c}) dx = 0$, существует единственное слабое решение $\vec{u}_0 \in \vec{W}_{2,\tau-\text{ort}}^1(G; \Gamma)$ задачи Неймана (1). Любое другое решение из пространства $\vec{W}_2^1(G)$ отличается от \vec{u}_0 на аддитивную вектор-постоянную.

Литература

1. Дубинский Ю. А. Нестандартные краевые задачи теории поля на плоскости / Ю.А. Дубинский, Л.В. Провоторова // Вестник МЭИ. — 2025. — № 6. — С. 206–211.
2. Дубинский Ю.А. Неравенства Фридрихса для 3D-векторных полей и задача Неймана / Ю.А. Дубинский, П.В. Зубков // Проблемы математического анализа : Выпуск 129. — С. 51–62, 2025.
3. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин // — М. :Наука, Главная редакция физико-математической литературы, — 1976. — 542с.

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ¹

О.Д. Прокопенко

(Москва, МГУ им Ломоносова, РЭУ им. Г.В.Плеханова)

olga.prokopenko.2011@mail.ru

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка типа Эмдена-Фаулера со степенным потенциалом:

$$y'' = x^k |y|^n |y'|^m \operatorname{sgn}(yy'), \quad (1)$$

где $k > 0, n > 0, m > 0$. В работе исследуются только 2-гладкие μ -решения, определенные на $(0; +\infty)$:

Определение. [1] *Решение y уравнения (1), определенное на промежутке (a, b) , возможно, бесконечном, назовем μ -решением, если выполнены следующие условия:*

1) *уравнение не имеет решений, совпадающих с y на некотором подынтервале промежутка (a, b) , но отличных от y в некоторой точке промежутка (a, b) ;*

2) *для любой конечной граничной точки решение y либо непродолжаемо за нее, либо имеет по крайней мере два продолжения, различающихся в точках, сколь угодно близких к ней.*

Используя методы, разработанные в [2–4], в работе [5] показано, что все μ -решения уравнения (1), определенные на $(0; +\infty)$, при $n > 0, 0 < t < 1$ являются либо строго монотонной функцией, либо тождественным нулем; при $n > 0, t \geq 1$ либо константой, либо строго монотонной функцией; доказана теорема о классификации решений вблизи границ области определения.

Для уравнения (1) доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Если $k > 0, n > 0, 1 > t > 0$, то уравнение (1) не имеет таких отрицательных решений, что $y \rightarrow M$, где $M < 0$, при $x \rightarrow +\infty$, кроме решений, обращающихся в тождественную константу, начиная с некоторого $x_0 > 0$.*

Следствие 1. *Если $k > 0, n > 0, 1 > t > 0$, то все отрицательные μ -решения уравнения (1), определенные на $(0; +\infty)$ и отрицательные вблизи $+\infty$, стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$ или, начиная с некоторого $x_0 > 0$, обращаются в тождественную константу. Существование решений, стремящихся к 0 при $x \rightarrow +\infty$, доказано в Теореме 3.*

¹ Работа поддерживается грантом РНФ (Проект 25-11-00133.).

© Прокопенко О.Д., 2026

Теорема 2. Если $k > 0$, $n > 0$, $1 > m > 0$, то уравнение (1) не имеет таких решений, что $y \rightarrow M$, где $M < 0$, при $x \rightarrow 0+$.

Следствие 2. Если $k > 0$, $n > 0$, $1 > m > 0$, то все μ -решения уравнения (1), определенные на $(0; +\infty)$, и, следовательно, непродолжаемые влево за 0, и отрицательные вблизи нуля, стремятся к $-\infty$ при $x \rightarrow 0+$. Существование таких решений доказано в Теореме 3.

Теорема 3. Если $n > 0$, $m > 0$, $n + m - 1 > 0$, $k - m + 2 > 0$, то все сингулярные в нуле возрастающие отрицательные μ -решения уравнения (1), определенные на $(0; +\infty)$, имеют следующую асимптотику:

$$y = -Cx^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0+, \quad (2)$$

где

$$\alpha = \frac{k - m + 2}{m + n - 1}, \quad C = ((\alpha)^{1-m}(\alpha + 1))^{\frac{1}{m+n-1}}. \quad (3)$$

Литература

1. Astashova I.V. On asymptotic classification of solutions to fourth-order differential equations with singular power nonlinearity / I.V. Astashova // *Mathematical Modeling and Analysis*. — 2016. — V. 21. — №4. — P. 502–521.
2. Асташова И.В. Единственность решений уравнений второго порядка типа Эмдена-Фаулера / И.В. Асташова. // *Проблемы математического анализа*. — 2021. — Т. 109. — С. 11–16.
3. Асташова И.В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений / И.В. Асташова. // *Известия РАН*. — 2008. — Т. 72. — №6. — С. 103–124.
4. Корчемкина Т.А. Об асимптотическом поведении неограниченных решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями общего вида / Т.А. Корчемкина // *Труды семинара им. И.Г. Петровского*. — 2019. — Вып. 32. — С. 239–256.
5. Прокопенко О. Д. Качественные свойства решений некоторых дифференциальных уравнений с неограниченным степенным потенциалом / О.Д. Прокопенко. // *Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. — 2025. — Т. 244. — С. 86–92.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С КОНТРОЛЬНОЙ ТОЧКОЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Е.В. Раецкая, Л.Х. Чунг (Воронеж, ВГЛТУ; Дананг,
Данангский научно-педагогический университет)
raetskaya@inbox.ru, lhtrung@ued.udn.vn

Рассматривается возмущенная система

$$\varepsilon \frac{\partial x(t, s, \varepsilon)}{\partial t} = B \frac{\partial x(t, s, \varepsilon)}{\partial s} + D \frac{\partial u(t, s, \varepsilon)}{\partial s} \quad (1)$$

с условиями

$$x(0, s, \varepsilon) = \alpha_0(s), \quad (2)$$

$$x\left(\frac{T}{2}, s, \varepsilon\right) = \beta_0(s), \quad (3)$$

$$x(T, s, \varepsilon) = \gamma_0(s), \quad (4)$$

где $t \in [0, T]$, $s \in [0, S]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; $x(t, s, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$; $u(t, s, \varepsilon) \in \mathbb{R}^m$;
 B, D — матрицы соответствующих размеров.

Наряду с возмущенной системой (1) рассматривается предельная система ($\varepsilon = 0$)

$$B \frac{\partial \bar{x}(t, s)}{\partial s} + D \bar{u}(t, s) = 0, \quad (5)$$

с условиями

$$\bar{x}(0, s) = \bar{\alpha}_0(s), \quad \bar{x}\left(\frac{T}{2}, s\right) = \bar{\beta}_0(s), \quad \bar{x}(T, s) = \bar{\gamma}_0(s). \quad (6)$$

Устанавливается влияние малого параметра на управляемость системы, то есть на возможность перевода системы (1) из произвольного состояния (2) в произвольное состояние (4) под влиянием какого либо управления $u(t, s, \varepsilon)$, при наличии дополнительного условия (3).

Исследование проводится методом каскадной декомпозиции [1]-[4], базирующемся на свойствах нетеровости прямоугольного матричного коэффициента D . Процесс декомпозиции полностью завершается за число шагов p , не превышающее размерности исходного пространства ($0 \leq p \leq n$). Решается задача построения в явном виде пары функций $x(t, s, \varepsilon), u(t, s, \varepsilon)$ - решения задачи управления (1)-(4). Устанавливаются связи между соответствующими функциями в условиях (2)-(4) и (6).

При выполнении условий разрешимости предельной задачи (5), (6), строится решение предельной задачи - пара функций $\bar{x}(t, s)$,

$\bar{u}(t, s)$. Исследование показывает, что решение предельной задачи не может удовлетворить всем условиям (2)-(4), то есть система (1) является сингулярно возмущенной.

Основной целью исследования сингулярно возмущенной системы (1) является построение управления, генерирующего явление погранслоя. Для любого решения предельной задачи строится такое решение возмущенной задачи, что функция состояния имеет вид

$$x(t, s, \varepsilon) = \bar{x}(t, s) + v(t, s, \varepsilon), \quad (7)$$

при этом функция управления возмущенной задачи строится в виде

$$u(t, s, \varepsilon) = \bar{u}(t, s) + w(t, s, \varepsilon), \quad (8)$$

где $v(t, s, \varepsilon)$ в (7) и $w(t, s, \varepsilon)$ в (8) - это функции погранслоя вблизи линий $t = 0$, $t = \frac{T}{2}$, $t = T$.

Выявляются условия для состояния возмущенной системы, а также свойства матричных коэффициентов, влекущие управляемость системы. Доказывается каскадный критерий управляемости возмущенной системы. Приводится иллюстративный пример.

Литература

1. Zubova S.P. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. AIMS Press, New York. — 2021. — V. 44, № 15. — P. 11998–12009.
2. Raetskaya E.V. Solution of a Control Problem for a Singularly Perturbed Dynamical System with Partial Derivatives // *Differential equation*s*. — 2025. — V. 61, № 12. — P. 1943–1961.
3. Zubova S.P. On the invariance of trajectories under perturbations in linear dynamic control systems /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya, Trung L.H. // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2025. — V. 288. № 1. — P. 92–105.
4. Zubova S.P. Control problem for dynamical systems with partial derivatives /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya, Trung L.H. // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2020. — V. 249. № 6. — P. 941–953.

ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА

В УСЛОВИЯХ ЕГО ПРОСТРАНСТВЕННО-УГЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

А.М. Райцин (Москва, МТУСИ)
arcadiyram@rambler.ru

Знание координат энергетического центра (ЭЦ) лазерного пучка является важной информацией для определения таких его характеристик как ширина пучка, расходимость, качество пучка, определяющих практическое применение лазерного источника [1-2].

В точных оптических измерениях, связанных с определением положения ЭЦ лазерного пучка основным источником погрешности часто выступают собственные флуктуации излучения лазера -угловое «дрожание» и пространственное смещение.

В работе рассматривается измерительная система, позволяющая выделить и компенсировать вклад нестабильности источника.

Метод компенсации, реализованный в измерительной системе рассматривает схему, в которой излучение разделяется делительной пластиной на непосредственно прошедшее через пластину и поступающее на измерительный матричный приемник (измерительный канал Т) и отраженное от пластины и поступающее на референтный матричный приемник (канал R). Положение ЭЦ пучка в измерительном канале требуется определить с высокой точностью. Оба приемника работают в режиме синхронного захвата кадров. Пусть для каждого синхронного кадра i , $i = 1, 2, \dots, N$, где N —число кадров (измерений) определены ЭЦ лазерного пучка [1]. Для координаты $X_T(i)$ в канале Т:

$$X_T(i) = X_{T0} + X_T^*(i) + \Delta X_T + \varepsilon_x(i),$$

где X_{T0} - постоянное исходное смещение ЭЦ, $X_T^*(i)$ - измеряемое положение ЭЦ пучка, ΔX_T - флуктуации лазера в канале Т, $\varepsilon_x(i)$ - погрешность определения ЭЦ за счет шума матричного приемника Т. Аналогичное выражение можно записать для координаты $Y_T(i)$

$$Y_T(i) = Y_{T0} + Y_T^*(i) + \Delta Y_T + \varepsilon_y(i).$$

Для координаты $X_R(i)$ в канале R:

$$X_R(i) = X_{R0} + \Delta X_R + \varepsilon_{xR}(i),$$

где X_{R0} - постоянное исходное смещение ЭЦ, ΔX_R - флуктуации лазера в канале R, $\varepsilon_{xR}(i)$ - погрешность определения ЭЦ за счет шума матричного приемника R. Аналогичное выражение можно записать для координаты $Y_R(i)$

$$Y_R(i) = Y_{R0} + \Delta Y_R + \varepsilon_{yR}(i)$$

Предполагается, что вклад флуктуаций лазера в оба канала линейно связан.

Показано, что в этом случае искомое положение ЭЦ лазерного пучка с учетом компенсации флуктуаций лазера определяется выражениями, содержащими ковариацию и дисперсию измеряемых величин

$$\begin{aligned} X_T^*(i) &= X_T(i) - K_x \Delta X_R(i) \\ Y_T^*(i) &= Y_T(i) - K_y \Delta Y_R(i) \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$\Delta X_R(i) = X_R(i) - \bar{X}_R, \Delta Y_R(i) = Y_R(i) - \bar{Y}_R,$$

$$\bar{X}_R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_R(i), \bar{Y}_R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_R(i),$$

$$K_x = \frac{\text{cov}(X_T, X_R)}{\text{var}(X_R)}, K_y = \frac{\text{cov}(Y_T, Y_R)}{\text{var}(Y_R)}.$$

Экспериментально подтверждена практическая целесообразность метода и показано, что эффективность компенсации, определяемая как отношение средних квадратических отклонений ЭЦ пучка до и после компенсации, может составлять $\approx 8 \div 10$.

Литература

1. ГОСТ Р ИСО 11146–2008. Лазеры и лазерные установки (системы). Методы измерений ширин, углов расходимости и коэффициентов распространения лазерных пучков. Ч.1. — М. : Стандартинформ, 2010. —20 с.
2. Raitsin A.M. The Determination of the Space-Energy Characteristics of Laser Radiation taking into Account the Limited Dynamic Range of the Measuring Instruments/A.M.Raitsin// Measurement Techniques — 2013 — volume 56 — pp. 868–875.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ КОШИ–РИМАНА С СИЛЬНЫМИ

СТЕПЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В МЛАДШИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ

А.Б. Расулов, И.Н. Дорофеева (Москва, МЭИ)

rasulzoda55@gmail.com, idoro224@gmail.com

Пусть конечная область D содержит множество $d = \{z : z_0 = 0, z_1, z = z_2, \dots, z = z_m\}$, состоящее из различных точек и ограниченное простым ляпуновским контуром Γ , ориентированным против часовой стрелки. Пусть $D_\varepsilon = D \cap \{|z - z_j| > \varepsilon\}$, $j = \overline{0, m}$.

В области $D_0 = D \setminus \{d\}$, рассматривается система уравнений :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - a\right)u + Au + \frac{1}{\rho_1}B\bar{u} = F, \quad (1)$$

где $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ и для краткости через $a(z)$ обозначено :

$$a(z) = \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{\rho_j} + a_0(z), \quad \rho_j(z) = (\bar{z} - \bar{z}_j)|z - z_j|^{n_j-1} \quad n_j > 1. \quad (2)$$

где a_j — комплексные числа и функция $a_0 \in L^p(D)$, $p > 2$ — скалярные величины, и

$$\rho_1(z) = \bar{z}|z|^{n-1}.$$

Также в (1) $u = \{u_1, u_2, \dots, u_l\}$ — искомая, $F = \{f_1, f_2, \dots, f_l\}$ — известная вектор-функция.

Относительно обратимых матриц $A \equiv A_{l \times l}$ и $B \equiv B_{l \times l}$ система (1) изучается в двух случаях: 1) когда все элементы этих заданных матриц — комплексные числа, 2) когда все элементы этих заданных матриц — аналитические функции комплексного переменного z .

Вектор-функцию $u(z) \in W_{loc}^{1,p}(D_0)$, где $p > 2$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду, называем его *регулярным* решением.

Общеизвестно, насколько важную роль в приложениях играет теория обобщенных аналитических функций, созданная И.Н. Векуа [1]. Она имеет глубокие связи со многими разделами анализа, геометрии и механики, включая квазиконформные отображения, теорию поверхностей, теорию оболочек и газовую динамику.

Многие результаты, полученные для обобщенных аналитических функций в скалярном случае, были обобщены на системы с несколькими неизвестными функциями при регулярных коэффициентах (см., например, [2], [3]).

Системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с несколькими неизвестными функциями, коэффициенты младших порядков которых имеют степенные особенности, исследованы недостаточно.

В настоящей работе для системы уравнений (1) найдено явное интегральное представление решений и исследованы граничные задачи.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 510 с.
2. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I / А. П. Солдатов // Соврем. матем. Фундам. напр. — 2017. — Т. 63, № 1. — С. 1–189.
3. Виноградов В.С. Краевая задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости / В. С. Виноградов // Дифф. уравнения. —1971. — Т. 7, № 8. — С. 1440–1448.

О СХОДИМОСТИ ОДНОМЕРНОЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ НАСЫЩЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

Е.В. Рунг (Москва, МТУСИ)

helenrung@mail.ru

Рассмотрим процесс фильтрационной консолидации в одномерной постановке для насыщенной жидкостью пористой среды. Область исследования ограничена отрезком $0 \leq x \leq L$, а математическое описание включает следующие уравнения:

$$-\frac{\partial \sigma^f}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = f(x, t), \quad \sigma^f = \epsilon_x + \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} = \varphi(x, t), \quad (2)$$

$$q = -g \left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3)$$

Предполагается, что на интервале $t \in (0, T]$ имеют место краевые условия:

$$u(0, t) = 0, \quad \sigma^f(L, t) - p(L, t) = F(t), \quad p(0, t) = p(L, t) = 0. \quad (4)$$

В начальный момент времени ($t = 0$) функции u , p принимают следующие значения:

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (5)$$

В соотношениях (1)–(5) эффективное напряжение в скелете записано как σ^f , через $p(x, t)$ обозначено давление жидкости в порах, а скорость фильтрации обозначена символом q . Предполагается, что $f(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $F(t)$, $g(\xi)$, $p_0(x)$, $u_0(x)$ — заданные функции. Компонента деформации определяется выражением $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u(x, t)$ обозначает перемещение частиц скелета.

Рассматривая задачу фильтрационной консолидации с предельным градиентом с математической точки зрения, можно представить её как систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В рамках этой системы ключевыми неизвестными являются два параметра: давление и характер перемещения жидкости в поровом пространстве. Особенность данной системы заключается в том, что пространственный дифференциальный оператор, представленный в уравнении (2), может подвергаться вырождению. Причина этого явления — функция $g(\xi)$, используемая в уравнении (3), которая способна принимать нулевое значение при выполнении условия $\xi \leq \beta$, где β — положительная величина. С физической точки зрения это означает, что в природных условиях существует пороговое значение градиента давления: если градиент превышает порог — жидкость начинает движение в порах; если градиент ниже порога — жидкость остаётся в статическом состоянии. Указанная особенность создаёт существенные сложности при применении численных методов для решения задачи. Для преодоления этой трудности применяется метод регуляризации вырождения. В связи с этим, помимо основной задачи (1)–(5), изучается также вариант задачи, в котором используется регуляризованный закон фильтрации

$$q = - \left(g \left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right) + \varepsilon \right) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6)$$

где $\varepsilon > 0$. Следует отметить, что уравнение (6) описывает закон фильтрации без предельного градиента.

В статье [1] приведено определение обобщенного решения задачи (1)–(5) и доказана обобщенная разрешимость рассматриваемой задачи. В данной работе с помощью метода Галеркина построен полудискретный вариант решения задачи (1)–(2), (4)–(6), установлена разрешимость соответствующей системы уравнений. Получены

априорные оценки для полудискретного решения, позволяющие выделить подпоследовательности кусочно-постоянных (по t) восполнений. Затем доказано, что предел этих восполнений при $\varepsilon \rightarrow 0$ является обобщённым решением задачи (1)–(5). Сходимость обоснована с помощью метода монотонности, широко используемого в исследовании нелинейных задач с предельным градиентом.

Литература

1. Kosterin A. V. On the Solvability of a One-Dimensional Problem of Filtration Consolidation with a Limiting Gradient / A. V. Kosterin, M. F. Pavlova, E. V. Rung // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. —2021. — 141. — 231–245 pp.

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ КОНФОРМНО-РЕКУРРЕНТНЫХ ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А.Р. Рустанов, С.В. Харитонова
(Москва, НИУ МГСУ, Оренбург, ОГУ)
aligadzhi@yandex.ru, hcb@yandex.ru

Тензор Вейля конформной кривизны C многообразия M^{2n} определяется формулой

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2(n-1)}(S_{il}g_{jk} + S_{jk}g_{il} - S_{ik}g_{jl} - S_{jl}g_{ik}) + \frac{\chi}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Определение 1. *Риманово многообразие M называется конформно-рекуррентным, если его тензор Вейля конформной кривизны C удовлетворяет соотношению $\nabla C = r \otimes C$, где r — ковариантный вектор на M . Случай $r \neq 0$ называется нетривиальным.*

Определение 2. *Приближенно келерово многообразие, тензор ∇C которого удовлетворяет тождеству*

$$\nabla_X(C)(Y, Z)(W) - \nabla_X(C)(JY, Z)(JW) + \nabla_{JX}(C)(JY, Z)(W) + \nabla_{JX}(C)(Y, Z)(JW) = 0; X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M),$$

назовем C_2 -рекуррентным многообразием.

Определение 3. Приближенно келерово многообразие, тензор ∇C которого удовлетворяет тождеству

$$\nabla_X(C)(Y, Z)(W) - \nabla_X(C)(JY, JZ)(W) + \nabla_{JX}(C)(JY, Z)(W) + \nabla_{JX}(C)(Y, JZ)(W) = 0; X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M),$$

назовем C_3 -рекуррентным многообразием.

Определение 4. Приближенно келерово многообразие, тензор ∇C которого удовлетворяет тождеству

$$\nabla_X(C)(Y, Z)(W) - \nabla_X(C)(Y, JZ)(JW) + \nabla_{JX}(C)(JY, Z)(W) - \nabla_{JX}(C)(JY, JZ)(JW) = 0; X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M),$$

назовем C_6 -рекуррентным многообразием.

Теорема 1. Приближенно келерово многообразие является C_6 -рекуррентным тогда и только тогда, когда оно одновременно является C_2 -рекуррентным и C_3 -рекуррентным многообразием.

Теорема 2. Приближенно келерово многообразие является C_6 -рекуррентным тогда и только тогда, когда тензор голоморфной секционной кривизны многообразия параллелен в первой канонической связности.

Теорема 3 [1]. Конформно-рекуррентное приближенно келерово многообразие размерности $n > 4$ является локально симметричным либо локально изоморфно произведению евклидова пространства и двумерного келерова многообразия.

Электронную версию тезисов необходимо выслать по электронному адресу vvmsh@mail.ru.

Литература

1. Кириченко В.Ф. Дифференциальная геометрия К-пространств / В.Ф. Кириченко // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., — 1977. — Т. 8. — С. 139–161.

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)

rykhlovvs@yandex.ru

Рассмотрим линейный обыкновенный дифференциальный оператор L на отрезке $[0, 1]$ вида

$$\ell(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y,$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $p'_0(x), p_j(x) \in L_1[0, 1], p_0(x) \neq 0 \forall x \in [0, 1]$.

Одной из важных задач является задача о разложении функции в ряд по корневым функциям (к.ф.) оператора L . Наиболее полно эта задачи решается в случае, когда удается доказать равносходимость (в том или ином смысле) разложений заданной функции в ряды по к.ф. оператора L и в тригонометрический ряд Фурье, так как тригонометрический ряд достаточно хорошо изучен.

Далее используем определения основных понятий из [1].

Исследование равносходимости спектральных разложений представляет собой активно развивающееся направление. Историю вопроса можно найти, например, в [2]. В случае $p_0(x) \equiv 1$ вопрос о влиянии свойств коэффициента $p_1(x)$ на равносходимость был уже исследован автором [2]. В случае $p_0(x) \neq 1$ влияние коэффициентов $p_0(x)$ и $p_1(x)$ на равносходимость ранее не было исследовано.

Обозначим $\eta(x) := \int_0^x |p_0(\tau)|^{-\frac{1}{n}} d\tau$. Тригонометрическая система $e_k(t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \exp\left(\frac{2k\pi it}{h}\right), k \in \mathbb{Z}$, где $h = \eta(1)$, является системой к.ф. оператора L_0 на отрезке $[0, h]$ вида

$$\ell_0(u) = u^{(n)}, \quad u^{(k-1)}(0) - u^{(k-1)}(h) = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Пусть $\lambda_\nu, \lambda_{0\nu}, \nu = 0, 1, \dots$, есть собственные значения (с.з.) операторов L и L_0 , соответственно. Обозначим через D_δ область комплексной плоскости \mathbb{C} , получающуюся из \mathbb{C} после удаления из нее всех с.з. операторов L и L_0 вместе с кругами с центрами в с.з. и достаточно малого фиксированного радиуса $\delta > 0$.

Проводя рассуждения, аналогичные [1, с. 74–75], и используя соответствующие асимптотические формулы для решений уравнений $\ell(y) - \lambda y = 0$ (см. [2]) при $p_1(x), p'_0(x) \in L_1[0, 1]$ и $p_0(x) \neq 0$, можно получить асимптотику с.з. оператора L с главными частями $(2k\pi i/h)^n$ при достаточно большом $|k| \in \mathbb{N}$. Ясно, что с.з. оператора L_0 есть числа $\lambda_{0k} = (2k\pi i/h)^n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то есть главные части асимптотик с.з. операторов L и L_0 совпадают.

Обозначим через D_δ область комплексной плоскости \mathbb{C} , получающуюся из \mathbb{C} после удаления из нее всех с.з. операторов L и L_0 вместе с кругами с центрами в с.з. и достаточно малого фиксированного радиуса $\delta > 0$.

Из асимптотики с.з. оператора L и формул для с.з. оператора L_0 следует, что существует последовательность $\{r_m\}_{m=1}^\infty \in \mathbb{R}$ такая, что

$$\left(2\pi m/h\right)^n < r_m < \left(2\pi(m+1)/h\right)^n,$$

контур $\Gamma_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_m\}$, начиная с некоторого достаточно большого m , лежат в области D_δ и между соседними контурами находятся не более двух с.з. λ_ν оператора L , начиная с некоторого m , и одно двукратное с.з. $\lambda_{0\mu}$ оператора L_0 . Рассмотрение таких контуров обусловлено структурой обычного тригонометрического ряда Фурье в экспоненциальной форме, который на самом деле является рядом со скобками.

Обозначим через R_λ и $R_{0\lambda}$ резольвенты операторов L и L_0 , соответственно. Пусть

$$S_m(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (R_\lambda f)(x) d\lambda,$$

$$S_{0m}(g, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} (R_{0\lambda} g)(t) d\lambda.$$

Известно [1, с. 92], что $S_m(f, x)$ есть частичная сумма биортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по к.ф. оператора L , содержащая слагаемые, соответствующие с.з. λ_ν , для которых $|\lambda_\nu| < r_m$, а $S_{0m}(g, t)$ есть частичная сумма ортогонального ряда Фурье функции $g(t)$ по к.ф. оператора L_0 , содержащая слагаемые, соответствующие с.з. $\lambda_{0\nu} = (2\nu\pi i/h)^n$, для которых $|\nu| \leq m$. То есть $S_{0m}(g, t)$ есть m -я частичная сумма $\sigma_m(g, t)$ тригонометрического ряда Фурье функции $g(t)$, где

$$\sigma_m(g, t) := \sum_{k=-m}^m (g, e_k) e_k(t), \quad \text{где } (g, e_k) := \frac{1}{h} \int_0^h g(\tau) e^{-\frac{2k\pi i \tau}{h}} d\tau.$$

Для формулировки результатов введём модули непрерывности

$$\omega(f, \delta)_p = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

$$\omega(f, \delta)_\infty = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} |f(t+h) - f(t)|,$$

где $1 \leq p < \infty$, $L_\infty[0, 1] := C[0, 1]$.

Пусть $\omega(L, \delta)_q := \max \{ \omega(p_1, \delta)_q, \omega(p'_0, \delta)_q \}$.

Предположим, что краевые условия (1) регулярны по Биркгофу в смысле определения [1, с. 66–67].

Положительная непрерывная в проколотовой окрестности нуля функция $\Omega(\delta)$, для которой выполнено условие

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Omega(\gamma\delta)}{\Omega(\delta)} = \gamma^\rho \quad \forall \gamma > 0,$$

называется *правильно меняющейся функцией* (п.м.ф.) в нуле порядка $\rho \in \mathbb{R}$. При $\rho = 0$ п.м.ф. называется *медленно меняющейся функцией* (м.м.ф.) в нуле. Теория п.м.ф. и м.м.ф. изложена в [3].

Введём следующие условия:

$$f(x) \in L_r[0, 1], \quad p'_0(x), p_1(x) \in L_q[0, 1], \quad 1/q + 1/r = 1, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (2)$$

$$\omega(f, \delta)_r = O(\Omega_1(\delta)), \quad \omega(L, \delta)_q = O(\Omega_2(\delta)), \quad \delta \rightarrow +0. \quad (3)$$

Говорим, что функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию *медленного изменения* (МИ), если \exists интервал $(0, \varepsilon_0)$, на котором

- (а) $\Omega(\delta)$ есть м.м.ф. в точке 0;
- (б) $\Omega(\delta)$ является монотонно неубывающей функцией и обладает свойством $\Omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$;
- (в) для любого $\gamma > 0$ справедливо $\Omega(\delta^\gamma) \sim \Omega(\delta)$ при $\delta \rightarrow +0$, то есть существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что

$$C_1\Omega(\delta) \leq \Omega(\delta^\gamma) \leq C_2\Omega(\delta).$$

Обозначим

$$w(x) := \exp \left(- \frac{1}{n} \int_0^x \frac{p_1(\tau)}{p_0(\tau)} d\tau \right), \quad W(x) := w(x) |p_0(x)|^{\frac{n-1}{2n}}.$$

Исследуется разность частичных сумм

$$\Phi_m(x) := S_m(f, x) - \text{sign}(p_0)W(x)\sigma_m \left(\frac{f(\eta^{-1}(\cdot))}{W(\eta^{-1}(\cdot))}, \eta(x) \right).$$

Теорема 1. *Если выполняются условия (2) и (3), функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию МИ и таковы, что*

$$\ln m \Omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) \Omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \rightarrow 0,$$

то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Phi_m(x)\|_{C(K)} = 0 \quad (4)$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leq C \left(\ln m \Omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) \Omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) + \Omega_1 \left(\frac{1}{m} \right) + \Omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right),$$

где $C = C(f, L, K)$.

В частности, если при $\alpha, \beta > 0$

$$\omega(f, \delta)_r = O \left(\frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta} \right), \quad \omega(L, \delta)_q = O \left(\frac{1}{\ln^\beta 1/\delta} \right), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (5)$$

то теорема 1 принимает более простой вид.

Теорема 2. Если выполняются условия (2) и (5), $\alpha + \beta > 1$, то для любого компакта $K \subset (0, 1)$ имеет место равносходимость (4) и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, L, K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right).$$

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.
2. Рыхлов В.С. Спектральные свойства дифференциальных оператор-функций / В.С. Рыхлов // Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Саратов. — 2025. — 295 с.
3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Пер. с англ. / Е. Сенета. — М.: Наука. Физматлит, 1985. — 144 с.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАБОВА-СВЕШНИКОВА О КОЛЕБАНИЯХ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

К.Б. Сабитов (Уфа, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова
УФИЦ РАН; Стерлитамак, Стерлитамакский филиал Уфимского
университета науки и технологий)

sabitov_fmfm@mail.ru

Рассмотрим малые двумерные колебания идеальной несжимаемой жидкости в декартовой системе координат (x, y) . Будем считать, что жидкость экспоненциально стратифицирована вдоль оси Oy , т.е. плотность ρ является функцией лишь от y и имеет вид

$$\rho(y) = Ae^{-2\beta y}, \quad A > 0, \quad \beta > 0.$$

В работах [1, 2] показано, что малые колебания такой жидкости описываются дифференциальным уравнением четвертого порядка

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{xx} + u_{yy} - \beta^2 u) + \omega^2 u_{xx} = 0, \quad (1)$$

где $\omega^2 = 2\beta g$ – квадрат так называемой частоты Вейсяля–Брента, g – ускорение силы тяжести. Функция $u(x, y, t)$ в уравнении (1) такова, что

$$u(x, y, t) = e^{-\beta y} \psi(x, y, t),$$

где $\psi(x, y, t)$ – функция тока, которая позволяет по формулам

$$v_1 = \psi_y, \quad v_2 = -\psi_x$$

определить компоненты поля скоростей частиц жидкости.

В начале рассмотрим одномерные колебания жидкости, т.е. в этом случае функция тока $\psi(x, y, t)$ имеет вид

$$\psi(x, y, t) = u(x, t)e^{\beta y}.$$

При этом уравнение (1) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{xx} - \beta^2 u) + \omega^2 u_{xx} = 0. \quad (2)$$

В уравнении (2) перейдем к безразмерным независимым переменным βx и ωt и сохраним для них прежние обозначения x и t . Тогда уравнение (2) примет вид

$$Lu \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{xx} - u) + u_{xx} = 0. \quad (3)$$

В работе [2] для уравнения (3) изучены задача Коши и начально-граничные задачи с условиями первого и второго рода на боковых сторонах прямоугольной области.

Рассмотрим уравнение (3) в области

$$D = \left\{ (x, t) \mid 0 < x < l, 0 < t < T \right\},$$

где l и T – заданные положительные постоянные, и поставим первую граничную задачу.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u, u_x, u_{tt}, u_{ttx} \in C(\overline{D}), \quad u_{ttxx} \in C(D), \quad (4)$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x, t) \in D, \quad (5)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u(x, T) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

где $\tau(x)$ и $\varphi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\tau(0) = \tau(l) = \varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

В данной работе изучена задача (4) – (7) для уравнения (3), затем для уравнения (1), так как такая задача для гиперболических уравнений высокого порядка не достаточно исследована. Следуя работам [3, 4] установлен критерий единственности решения задачи, при этом решение построено в явном виде как сумма ряда и доказана устойчивость его от данных граничных функций.

Работа выполнена на средства государственного бюджета по проекту №123021200015-5 (FMRS-2023-0015).

Литература

1. Габов С.А. О некоторых задачах, связанных с колебаниями стратифицированных жидкостей / С.А. Габов, А.Г. Свешников // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18. — № 7. — С. 1150 – 1156.

2. Габов С.А. Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx} - u) + u_{xx} = 0$ и некоторых связанных с ним задачах / С.А. Габов, А.А. Оразов // Журн. вычис. мат. и матем. физ. 1986. — Т. 26. — № 1. — С. 92 – 102.

3. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными / К.Б. Сабитов // Матем. заметки. 2015. — Т. 97. — № 2. — С. 262 – 276.

4. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для двумерного волнового уравнения в цилиндрической области / К.Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. 2025. — Т. 61. — № 1. — С. 50 – 67.

ПРОДОЛЖЕНИЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ, РАСШИРЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЛУГРУПП

В.Ж. Сакбаев

(Москва, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
РАН)

fumi2003@mail.ru

Траектории движения вдоль бездивергентных векторных полей в фазовом пространстве автономных систем дифференциальных уравнений изучаются наряду с соответствующим эволюционным дифференциальным уравнением Лиувилля, описывающим сдвиг аргумента заданной на фазовом пространстве функции вдоль траекторий векторного поля. В качестве фазового пространства рассматриваются графы и плоские области. Отсутствие глобального по времени решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений приводит к отсутствию порождаемой задачей Коши группы преобразований пространства начальных данных [1].

Продолжение совокупности фазовых траекторий сопоставляется с косозермитовым расширением дифференциального оператора, заданного на гладких финитных функциях на фазовом пространстве. Установлено, какие косозермитовы расширения дифференциального оператора первого порядка ассоциированы с детерминированными продолжениями фазового потока, а какие – со стохастическими продолжениями траекторий через границу фазового пространства [1].

Пусть евклидово пространство $E = \mathbb{R}^2$ является двумерным фазовым пространством гамильтоновой системы, снабженным стандартной однородной симплектической формой ω , имеющей канонический вид в некотором ортонормированном базисе (ОНБ) $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ пространства E . Пусть $Q = \text{span}(e_1)$ – пространство координат и $P = \text{span}(e_2)$ – пространство импульсов. Рассмотрим гамильтонову систему, задаваемую на фазовом пространстве (E, ω) функцией Гамильтона

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}q^4, \quad (q, p) \in E. \quad (1)$$

Траектории гамильтоновой системы, описываемые системой уравнений

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = q^3, \quad (2)$$

лежат на линиях уровня функции Гамильтона $H(q, p) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Для каждой точки $z_0 = (q_0, p_0) \in E = \mathbb{R}^2$ обозначим через $(T_*(z_0), T^*(z_0))$ максимальный интервал существования траектории $\gamma(z_0) = \{\Phi(t, 0, z_0), t \in (T_*(z_0), T^*(z_0))\}$, проходящей через точку z_0 в момент времени $t_0 = 0$. При этом $-\infty < T_*(z_0) < T^*(z_0) < +\infty$ для всех $z_0 \in E$ таких, что $H(z_0) \neq 0$. Пусть $\Phi(t, (q_0, p_0))$, $t \in (T_*(z_0), T^*(z_0))$ – решение задачи Коши для системы уравнений Гамильтона (2), определенное на максимальном интервале существования.

Определим такие продолжения траектории гамильтоновой системы через моменты ухода на бесконечность с помощью добавления к фазовому пространству бесконечно удаленных точек и склеивания по ним концов траекторий, что:

А) отображения сдвига фазового пространства вдоль продолженных траекторий являются потоком диффеоморфизмов;

В) значение энергии сохраняется на продолженной траектории;

С) фазовый объем сохраняется продолженным потоком.

С векторным полем $\mathbf{b} = J\nabla H$ связан дифференциальный оператор $\mathbf{L}_0 : C_0^\infty(E) \rightarrow L_2(E)$, действующий по правилу

$$\mathbf{L}_0 u(z) = (J\nabla H(z), \nabla u(z)), \quad z \in E; \quad u \in C_0^\infty. \quad (3)$$

Оператор \mathbf{L}_0 является плотно определенным симметрическим оператором в пространстве $H = L_2(E)$. Сопряженный оператор \mathbf{L}_0^* имеет область определения

$$D(\mathbf{L}_0^*) = \{u \in L_2(E) : (J\nabla H, u) \in L_2(E)\}.$$

Расширения фазового потока определяются с помощью расширения фазового пространства E посредством присоединения к нему бесконечно удаленных точек – стоков траекторий $\partial E_- = \{(\gamma_c^-, T_*(c)), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{(\gamma_c^+, T_*(c)), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ и источников траекторий $\partial E_+ = \{(\gamma_c^-, -T_*(c)), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{(\gamma_c^+, -T_*(c)), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Детерминированное продолжение траекторий потока задается некоторым биективным отображением границы стоков ∂E_- на границу стоков ∂E_+ . При этом продолжения сохраняют меру Лебега на пространстве фазовом E и значение функционала энергии в точках траектории. Каждая траектория γ , достигшая в некоторый момент времени $t = T_\gamma$ точки $A_\gamma^- \in \partial E_-$, продолжается в правую полукрестность точки T_γ траекторией $\gamma'(\gamma)$ выходящей из точки $A^+(\gamma) \in \partial E_+$ в момент времени T_γ . Таким образом, продолжение фазового потока задается отображением части границы ∂E_- на ее

часть ∂E_+ , причем отображение должно быть биективным и сохраняющим значение функционала энергии. Такие продолжения траекторий называются гамильтоновыми продолжениями траекторий.

Поскольку продолженный поток Φ сохраняет меру Лебга λ на фазовом пространстве E , то он допускает представление в пространстве $L_2(E, \mu, \mathbb{C})$, $1 \leq p \leq +\infty$ унитарной группой $\mathbf{U}_\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ такой, что

$$\mathbf{U}_\Phi(t)u(x) = u(\Phi_{-t}(x)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in E.$$

Помимо косоэрмитовых расширений, параметризованных различными способами гамильтонова продления фазовых траекторий, другие расширения кососимметрического оператора соответствуют унитарной группе с рассеянием амплитуды состояния при выходе с концевых точек графа из множества ∂E_- . Такие продолжения могут быть заданы посредством унитарных отображений подпространства $\text{Ker}(\mathbf{L}_0^* - \mathbf{I})$ на подпространство $\text{Ker}(\mathbf{L}_0^* + \mathbf{I})$ [2].

Фазовая плоскость E после удаления множества нулевой меры $\gamma_0 = \{h(q, p) = 0\}$ является объединением четырех областей $E_\pm^> = \{(q, p) \in E : h(q, p) > 0, \pm p > 0\}$, $E_\pm^< = \{(q, p) \in E : h(q, p) < 0, \pm q > 0\}$. Каждой точке $(q, p) \in E_\pm^>$ однозначно сопоставляется число $T(q, p)$, равное времени движения в поле скоростей $\mathbf{a}(q, p)$, $(q, p) \in E$ к точке (q, p) от точки пересечения кривой $\gamma_{(q, p)} = \{(q', p') \in D_+^> : h(q', p') = h(q, p)\}$ с осью $q = 0$, т.е. от точки $(0, \sqrt{2h(q, p)})$. Аналогично определяются функции $T(q, p)$, $(q, p) \in E_i$, в областях $E_i^>$, $E_i^<$, $E_\pm^<$.

Каждая из четырех областей $E_\pm^>$, $E_\pm^<$, $E_+^<$, $E_-^<$ отображается на соответствующую область $G_\pm^>$, $G_\pm^<$ изменения переменных (c, s)

$$G_\pm^> = \{c = h(q, p), \quad s = T(q, p), \quad (q, p) \in E_\pm^>\};$$

$$G_\pm^< = \{c = -h(q, p), \quad s = T(q, p), \quad (q, p) \in E_\pm^<\},$$

диффеоморфизмом $(q, p) \rightarrow (c(q, p), s(q, p))$, сохраняющим меру Лебга.

Введем оператор замены $\mathcal{S} : L_2(E) \rightarrow L_2(G)$, при каждом $j = 1, \dots, 4$ сопоставляющий функции $u(q, p)$, $(q, p) \in E_j$, $u \in L_2(E_j)$ функцию $\psi(c, s)$, $(c, s) \in G_j$ согласно равенству $u(q, p) = \psi(c(q, p), s(q, p))$, $(q, p) \in E_j$. В частности, $h(q, p) = \tilde{h}(c(q, p), s(q, p))$ если $\tilde{h}(c, s) = c$.

Лемма 1. *Оператор $\tilde{\mathbf{L}}_0 : C_0^1(G) \rightarrow L_2(G)$ такой, что*

$$\tilde{\mathbf{L}}_0 \mathcal{S}u = \mathcal{S} \mathbf{L}_0 u \quad \forall u \in C_0^1(E), \quad (4)$$

действует на произвольную функцию $\psi \in C_0^1(G)$ согласно равенству

$$\tilde{\mathbf{L}}_0 \psi = \frac{\partial}{\partial s} \psi = (\mathbf{J} \nabla \tilde{h}, \nabla \psi).$$

Оператор $\tilde{\mathbf{L}}_0$ плотно определен, симметричен, а его сопряженный имеет область определения $D(\tilde{\mathbf{L}}_0^*) = \bigoplus_{j=1}^4 W_2^{0,1}(G_j)$, где $W_2^{0,1}(G_j)$ – пространство Соболева функций $\psi_j \in L_2(G_j)$, обладающих обобщенной производной $\frac{\partial}{\partial s} \psi_j \in L_2(G_j)$. При этом $\tilde{\mathbf{L}}_0^* \psi(c, s) = \frac{\partial}{\partial s} \psi(c, s) \forall \psi \in D(\tilde{\mathbf{L}}_0^*)$. Следовательно, всякая функция $\psi \in D(\tilde{\mathbf{L}}_0^*)$ имеет граничные значения $\partial \psi = (\bigoplus_{j=1}^4 \partial \psi_j^+) \oplus (\bigoplus_{j=1}^4 \partial \psi_j^-)$, где $\psi_j = \psi|_{G_j}$, $\partial \psi_j^\pm = \psi|_{\partial G_j^\pm}$. При этом $\{\partial \psi_j^\mp(c, \pm T_j(c)), c \in \mathbb{R}_+\} \in L_2(\mathbb{R}_+)$ при каждом $j = \overline{1, \dots, 4}$.

Теорема 1. Сужение $\tilde{\mathbf{L}}_J$ оператора $\tilde{\mathbf{L}}_0^*$ на подпространство $D(\tilde{\mathbf{L}}_J)$ пространства $D(\tilde{\mathbf{L}}_0^*)$ является косоэрмитовым расширением $\tilde{\mathbf{L}}_0$ тогда и только тогда, когда

$$D(\tilde{\mathbf{L}}_J) = \{\psi \in D(\tilde{\mathbf{L}}_0^*) : \partial \psi_+ = J \partial \psi_-\}$$

где J – унитарный оператор в пространстве $\bigoplus_{j=1}^4 L_2(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 2. Для косоэрмитова расширения $\tilde{\mathbf{L}}_J$ оператора $\tilde{\mathbf{L}}_0$ найдется группа $\tilde{\Phi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, сохраняющая меру Лебега преобразований пространстве G , продолжающая сдвиги вдоль векторного поля, удовлетворяющая условиям

$$\tilde{h} \circ \tilde{\Phi}(t) = \tilde{h} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$e^{t \tilde{\mathbf{L}}_J} = \mathbf{U}_{\tilde{\Phi}}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

если и только если группа $e^{t \tilde{\mathbf{L}}_J}$, $t \in \mathbb{R}$, сохраняет множество значений произвольной функции из пространства $L_2(G)$ и операторы группы $e^{t \tilde{\mathbf{L}}_J}$ коммутируют с оператором с умножения на аргумент s .

Литература

1. Сакбаев В. Ж. Продолжения фазовых траекторий и расширения дифференциальных операторов // МТКН. Т. 3, № 4, С. 87–119 (2025).
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

О ФОРМУЛАХ ДЛЯ СУММ НЕКОТОРЫХ КРАТНЫХ РЯДОВ ЭЙЛЕРА-ЗАГЕРА

Т.А. Сафонова (Архангельск, САФУ)
t.Safonova@narfu.ru

Хорошо известны следующие формулы

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = 1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} + \frac{(\pi z)^4}{5!} + \dots = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Следуя Л.Эйлеру (1734 г.), из них легко извлечь тождество

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k < +\infty} \prod_{l=1}^k \frac{1}{j_l^2} = \frac{\pi^{2k}}{(2k+1)!},$$

являющееся при $k = 1$ решением знаменитой Базельской задачи.

Цель настоящего доклада - средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов на отрезке обобщить это равенство, т.е. получить аналогичные формулы для сумм вида

$$\mathcal{U}_{2nk} = (-1)^{(n+1)k} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k < +\infty} \prod_{l=1}^k \frac{1}{(2j_l)^{2n}},$$
$$\mathcal{V}_{2nk} = (-1)^{(n+1)k} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k < +\infty} \prod_{l=1}^k \frac{1}{(2j_l - 1)^{2n}}$$

при $n \in \mathcal{N}$ и $k = 0, 1, \dots$ ($\mathcal{U}_0 := 1$, $\mathcal{V}_0 := 1$).

Пусть $n \geq 2$ - фиксированное натуральное число. Мощность множества всевозможных отображений множества $\{1, 2, \dots, n-1\}$ на множество $\{0, 1\}$ равна 2^{n-1} . Элементы этого множества занумеруем символами m_s и определим числа $a_s (= a_s(n))$, полагая

$$a_s := \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{m_s(j)} \varepsilon^j, \quad s = 1, 2, \dots, 2^{n-1},$$

где $\varepsilon := e^{i\pi/n}$, а i - мнимая единица (в случае $n = 1$ мы полагаем, что $a_1 = 0$). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. При $n = 1, 2, \dots$ справедливы равенства

$$\mathcal{U}_{2nk} = \frac{-i^{n+1} \pi^{2nk} \mathcal{B}_{2nk+n}}{2^{2nk+n-1} (2nk+n)!} \quad k = 0, 1, \dots$$

и

$$\mathcal{V}_{2nk} = \frac{\pi^{2nk} \mathcal{E}_{2nk}}{2^{2nk+n-1} (2nk)!}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где числа \mathcal{B}_{2nk+n} и \mathcal{E}_{2nk} определяются равенствами

$$\mathcal{B}_{2nk+n} := \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (-1)^{\nu(s)} (1+a_s)^{2nk+n}, \quad \mathcal{E}_{2nk} := \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (1+a_s)^{2nk},$$

а числа $\nu(s)$ таковы, что если $n = 1$, то $\nu(1) = 0$, и если $n \geq 2$, то $\nu(s) = 0$, когда количество слагаемых со знаком плюс в числе a_s чётное, и $\nu(s) = 1$ в противном случае.

Символом $\zeta(N_1, N_2, \dots, N_k)$ принято обозначать сумму

$$\zeta(N_1, N_2, \dots, N_k) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k < +\infty} \frac{1}{i_1^{N_1} i_2^{N_2} \dots i_k^{N_k}},$$

где N_1, N_2, \dots, N_k - натуральные числа и $N_1 > 1$, и называть k -кратными значениями дзета-функции Эйлера-Загера. Если $N_1 = N_2 = \dots = N_k = N$, то эту сумму обозначают символом $\zeta(\{N\}_k)$.

Из теоремы 1 следует справедливость следующего утверждения.

Следствие 1. При $n = 1, 2, \dots$ справедливы равенства

$$\zeta(\{2n\}_k) = \frac{(-1)^{(n+1)k+1} i^{n+1} \pi^{2nk}}{2^{n-1} (2nk+n)!} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (-1)^{\nu(s)} (1+a_s)^{2nk+n}$$

и

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k < +\infty} \prod_{l=1}^k \frac{1}{(2j_l - 1)^{2n}} = \frac{(-1)^{(n+1)k} \pi^{2nk}}{2^{2nk+n-1} (2nk)!} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (1+a_s)^{2nk}.$$

Автор выражает искреннюю благодарность проф. К.А. Мирзоеву за постоянное внимание к работе.

ВЛИЯНИЕ МАСШТАБИРОВАНИЯ И ФОРМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

НА РЕЗУЛЬТАТЫ НЕЧЕТКОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

И. А. Седых, К. Н. Макаров (Липецк, ФГБОУ ВО ЛГТУ)
sedykh-irina@yandex.ru, kirik0-1@yandex.ru

Кластерный анализ позволяет объединять объекты в кластеры на основе схожести некоторых признаков, свойственных каждому объекту какого-либо множества [1]. Объединение происходит с помощью вычисления расстояния между этими объектами. Нечеткие методы кластеризации позволяют одному и тому же объекту принадлежать одновременно нескольким (или даже всем) кластерам, но с различной степенью принадлежности [2]. Одним из недостатков данного метода разделения данных является его чувствительность к различным параметрам таким, как начальные степени принадлежности, начальным центрам кластеров, количеству кластеров [3], форме данных и способу масштабирования данных.

В данном исследовании рассматривается влияние способов масштабирования при разных формах распределения исходных данных на результаты нечеткой кластеризации.

Существуют несколько методов масштабирования признаков, таких как нормализация и стандартизация. Большое количество работ посвящено исследованию влияния нормализации/стандартизации на результаты кластеризации, чаще всего работы связанные с медицинской, биологией [4-5] и с оптимальным уменьшением размерности в многомерных данных в различных областях [6-7].

В нашем исследовании поднимается вопрос: «Как некоторые методы масштабирования влияют на результаты нечеткой кластеризации различных форм распределения данных?». Для этого были сгенерированы три различные выборки из 15 000 точек, образующие:

1. Пересекающиеся эллипсоиды.
2. Непересекающиеся эллипсоиды.
3. «Бутоны цветка»: X, Y – задавались с помощью случайных чисел, заданных по равномерному распределению в диапазоне $(-10;10)$,

$$Z = \sqrt{(X^2 + Y^2)} + 3 \cdot \cos\left(\sqrt{(X^2 + Y^2)}\right) + 5.$$

В исследовании используются три метода нечеткой кластеризации: нечетких С-средних (FCM), нечетких с-эллипсоидов (FCE) и Густавсона-Кесселя (GK) [8], начальное распределение степеней принадлежности задается случайно и не меняется, а данные разбиваются на 2–5 кластеров.

Далее для сравнения влияния способа масштабирования рассматриваются результаты нечеткой кластеризации на исходный данных и масштабированных. Использовались четыре метода масштабирования: абсолютное максимальное масштабирование (Absolute Maximum Scaling, AMS), Min-Max нормализация (Min-Max Scaling, MMS), нормализация по сумме (sum normalization, SN) и Z-Стандартизация (Z-Scores).

Ниже описаны результаты нечеткой кластеризации для каждой фигуры.

1. Пересекающиеся эллипсоиды.

Масштабирование исходных данных для пересекающихся эллипсоидов сильно повлияло на результаты нечеткой кластеризации методами FCM и FCE: данные разбиваются на кластеры плоскостями. GK, наоборот, не так сильно подвержен влиянию масштабирования: кластеры почти соответствуют исходным эллипсоидам. Однако при нормализации методом SN метод GK дает почти такой же результат, как и при кластеризации методом FCM на масштабированных данных методами SN и Z-Scores.

2. Непересекающиеся эллипсоиды.

Масштабирование исходных данных для непересекающихся эллипсоидов сильно влияет на результаты нечеткой кластеризации при разбиении всеми из рассмотренных методов. Нечеткая кластеризация методом FCM чаще всего разбивает исходные данные на кластеры плоскостями или кусочно-сферическими поверхностями. Данные также делятся плоскостями и при кластеризации методом FCE, но в данном случае чаще всего хорошо выделены один-два крупных кластера, остальные кластеры состоят из небольшого количества точек. Если же использовать метод GK, то результаты кластеризации на исходных данных и с нормализацией методами AMS, MMS и Z-Scores почти одинаковы, но при этом три эллипсоида хорошо выделены только при разбиении на 4 кластера. Однако при кластеризации на нормализованных/стандартизованных данных методом SN результат нечеткой кластеризации GK похож на результат кластеризации методом FCM для нормированных данных.

3. «Бутон цветка».

Результаты нечеткой кластеризации любым из методов на масштабированных данных методами AMS, MMS и Z-Scores не сильно отличаются от результатов нечеткой кластеризации без масштабирования. В отличие от них, масштабирование методом SN значительно повлияло на результат нечеткой кластеризации всеми рассмотренными методами. При использовании метода FCM нечеткая кластеризация делит масштабированные данные методом SN вертикальными плоскостями, при использовании FCE данные делятся выпуклыми/вогнутыми поверхностями. А при использовании GK относительно хорошо выделяются только три кластера.

Заключение.

В исследовании было рассмотрено влияние масштабирования и формы распределения исходных данных на результаты нечеткой кластеризации. Проведённые эксперименты показали, что метод нечеткой кластеризации FCM менее подвержен, FCE в некоторых случаях сильно подвержен, а GK сильнее всего подвержен влиянию масштабирования данных. Также можно отметить, что только GK при определенных условиях почти полностью определил эллипсоиды.

Литература

1. Седых И.А., Макаров К.Н. Идентификация квадратичных комплекснозначных динамических окрестностных моделей на кластеризованных данных и без кластеризации // Управление большими системами. Выпуск 111. М.: ИПУ РАН, 2024. С.66-80.
2. Седых И.А., Макаров К.Н. Нечеткая кластеризация комплекснозначных данных // Вести учебных заведений Черноземья. 2023. Т. 19, №2 (72). С. 46–57.
3. Седых, И. А. Определение оптимального количества кластеров при идентификации окрестностных моделей / И. А. Седых, К. Н. Макаров // Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2025. — Т. 21, № 4. — С. 64-71. — DOI 10.36622/1729-6501.2025.21.4.010. — EDN IPTDCQ;
4. Kim SY, Lee JW, Bae JS. Effect of data normalization on fuzzy clustering of DNA microarray data. BMC Bioinformatics. 2006 Mar 14;7:134. doi: 10.1186/1471-2105-7-134. PMID: 16533412; PMCID: PMC1431564.
5. S. P and K.Premalatha, “Impact of Fuzzy Normalization on Clustering Microarray Temporal Datasets Using Cuckoo Search,” Comput. Syst. Sci. Eng., vol. 35, no. 1, pp. 39–50, 2020. <https://doi.org/10.32604/csse.2020.35.039>.

6. van Lingen, H. J., Suarez-Diez, M., Saccenti, E. (2024). Normalization of gene counts affects principal components-based exploratory analysis of RNA-sequencing data. *Biochimica et Biophysica Acta - Gene Regulatory Mechanisms*, 1867(4), Article 195058. <https://doi.org/10.1016/j.bbagr.2024.195058>.

7. Al-Mekhlafi, Amani, Klawitter, Sandra and Klawonn, Frank. «Standardization with zlog values improves exploratory data analysis and machine learning for laboratory data» *Journal of Laboratory Medicine*, vol. 48, no. 5, 2024, pp. 215-222. <https://doi.org/10.1515/labmed-2024-0051>.

8. Волкова Е. П., Зияутдинов В. С. Анализ корректности кластеризации данных методами нечеткого кластерного анализа // *НиКа*. 2010. №. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-korrektnosti-klasterizatsii-dannyh-metodami-nechetkogo-klaster-nogo-analiza> (дата обращения: 01.04.2026).

ГЛОБАЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЙ ОТ БЕСКОНЕЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕАРИЗИРУЕМЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ С ИНДЕФИНИТНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Р.Б. Сейидзаде (Баку, БГУ)
rakhshandaseyidzade@gmail.com

Рассмотрим следующую нелинейную задачу

$$\ell u \equiv (pu'')'' - (qu')' = \lambda ru + h(x, u, u', u'', u''', \lambda), \quad x \in (0, l), \quad (1)$$

$$u'(0) \cos \alpha - (pu'')'(0) \sin \alpha = 0, \quad u(0) \cos \beta + Tu(0) \sin \beta = 0, \quad (2)$$

$$u'(l) \cos \gamma + (pu'')'(l) \sin \gamma = 0, \quad u(l) \cos \delta - Tu(l) \sin \delta = 0, \quad (3)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ – вещественный параметр, $Tu \equiv (pu'')' - qu'$, $p \in C^2[0, l]$, $p > 0$, $q \in C^1[0, l]$, $q \geq 0$, $r \in C[0, l]$ и существуют $x', x'' \in [0, l]$ такие, что $r(x')r(x'') < 0$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Функция h имеет форму $h = f + g$, где $f, g \in C([0, l] \times \mathbb{R}^5)$ и удовлетворяют следующим условиям: для любых $(x, u, s, v, w, \lambda) \in [0, l] \times \mathbb{R}^5$ выполняются соотношения

$$uf(x, u, s, v, w, \lambda) \leq 0, \quad ug(x, u, s, v, w, \lambda) \leq 0;$$

существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\left| \frac{f(x, u, s, v, w, \lambda)}{u} \right| \leq M, \quad x \in [0, l], \quad (u, s, v, w) \in \mathbb{R}^4, \quad u \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$g(x, u, s, v, w, \lambda) = o(|u| + |s| + |v| + |w|)$ при $|u| + |s| + |v| + |w| \rightarrow \infty$ равномерно по $(x, \lambda) \in [0, l] \times \Lambda$ для каждого ограниченного промежутка $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

Рассмотрим линейную задачу

$$\begin{cases} (\ell y)(x) = \lambda r(x)y(x), & x \in [0, l], \\ y \in BC, \end{cases} \quad (4)$$

которая получается из (1) при $h \equiv 0$, где через BC обозначено множество функций удовлетворяющих граничным условиям (2) и (3). В силу [1, Теорема 1] собственные значения задачи (4) являются вещественными, простыми и образуют две неограниченные последовательности

$0 < \lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \dots < \lambda_k^+ < \dots$ и $0 > \lambda_1^- > \lambda_2^- > \dots > \lambda_k^- > \dots$. Кроме того, для каждого $k \in \mathbb{N}$ соответствующие им собственные функции y_k^+ и y_k^- имеют в точности $k-1$ простых нулей в интервале $(0, l)$ и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\int_0^l r(x)(y_k^+(x))^2 dx > 0, \quad \int_0^l r(x)(y_k^-(x))^2 dx < 0. \quad (5)$$

Пусть $E = C^3[0, l] \cap BC$ – Банахово пространство с нормой $\|y\|_3 = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty + \|y''\|_\infty + \|y'''\|_\infty$, где $\|y\|_\infty = \max_{x \in [0, l]} |y(x)|$. Следуя [2]

через $S_{k, \sigma}^\nu$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma, \nu \in \{+, -\}$, обозначим множество функций из E обладающих осцилляционными свойствами собственных функций задачи (4) и удовлетворяющих интегральным соотношениям (5).

Пусть $I_k^- = [\lambda_k^- + \frac{5M}{4r_0}, \lambda_k^-]$, $I_k^+ = [\lambda_k^+, \lambda_k^+ + \frac{5M}{4r_1}]$, $r_0 = \min_{x \in [0, l]} r(x)$, $r_1 = \max_{x \in [0, l]} r(x)$.

Теорема 1 Для каждого $k \in \mathbb{N}$, каждого σ и каждого ν существует компонента $C_{k, \sigma}^\nu$ множества решений задачи (1)-(5), которая отвечает отрезка $I_k^\sigma \times \{\infty\}$ и окрестность $Q_{k, \sigma}$ отрезка $I_k^\sigma \times \{\infty\}$ такие, что (а) $C_{k, \sigma}^\nu \subset \mathbb{R}^\sigma \times E$; (б) $C_{k, \sigma}^\nu \cap Q_{k, \sigma} \subset \mathbb{R}^\sigma \times S_{k, \sigma}^\nu$; (б) либо существует $(k', \nu') \neq (k, \nu)$ такое, что $C_{k, \sigma}^\nu$ пересекает отрезка $I_{k'}^{\sigma'} \times \{\infty\}$ по множеству $\mathbb{R}^{\sigma'} \times S_{k', \sigma'}^{\nu'}$, либо $C_{k, \sigma}^\nu$ содержит $(\lambda, 0)$ для некоторого

$\lambda \in \mathbb{R}^\sigma$, либо естественная проекция множества $C_{k,\sigma}^\nu$ на $\mathbb{R}^\sigma \times \{0\}$ неограничена.

Литература

1. Aliyev Z.S. On a fourth-order spectral problem with indefinite weight / Z.S. Aliyev // Modern Problems of Mathematics and Mechanics: Materials of the 11th International Conference dedicated to the genius Azerbaijani scientist and thinker Nasireddin Tusi.– Baku: Printing Polygraphy Limited Liability Company, 2024. – P. 86–88.

2. Aliyev Z.S. Global bifurcation from infinity in some nonlinearizable eigenvalue problems with indefinite weight / Z. S. Aliyev, R.A. Huseynova // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. – 2018. – V. 44, No. 1. – P. 123–134.

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ¹

И.Н. Сергеев (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова)
igniserg@gmail.com

Для фазовой области $G \subset \mathbb{R}^2$, луча $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ и функции $f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G)$ рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad 0, x \in G. \quad (1)$$

Через $\mathbb{S}_\delta, \mathbb{B}_\delta \subset \mathbb{R}^2$ обозначим сферу и проколотый шар с центром в точке 0 и радиусом $\delta > 0$, а через $x(\cdot, x_0)$ — *непродолжаемое решение* системы (1) с начальным значением $x(0, x_0) = x_0 \in G$.

Определив различные крайние показатели вращаемости двумерной системы (1), которые, как оказывается, заметно отличаются по своим свойствам от аналогичных показателей колеблемости и блуждаемости [1], изучим связь между полными и радиальными свойствами вращаемости (невращаемости) этой системы (1) [2].

Определение 1. Введем *старший* и соответственно *младший* (полные) показатели вращаемости системы (1): *нижние*

$$\check{\theta}^+(f) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Theta(t, x(\cdot, x_0)), \quad \check{\theta}^-(f) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Theta(t, x(\cdot, x_0))$$

и *верхние*

$$\hat{\theta}^+(f) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Theta(t, x(\cdot, x_0)), \quad \hat{\theta}^-(f) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Theta(t, x(\cdot, x_0)),$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 075-03-2026-395).

© Сергеев И.Н., 2026

где при $t > 0$ и $v \in C^1([0, t], \mathbb{R}^2)$ функционал вращаемости $\Theta(t, v)$ — это модуль непрерывного ориентированного угла между $v(t)$ и $v(0)$ с нулевым начальным (при $\tau = 0$) значением.

Определение 2. Для вектора $u \in S_1$ и некоторой кривой q_u , заданной гладким отображением $0 < c \mapsto x_0(c) \in S_c$ с производной $x'_0(+0) = u$ на предельном конце, зададим соответственно старшие и младшие нижние и верхние u -радиальные показатели вращаемости системы (1) по аналогии с определением 1, заменив всюду в его формулах пределы при $x_0 \rightarrow 0$ пределами при $q_u \ni x_0 \rightarrow 0$.

Теорема 1. Старший и младший нижний и верхний показатели вращаемости любой системы (1) совпадают для каждого направления $u \in S_1$ с одноименными u -радиальными показателями

$$\check{\theta}^+(f) = \check{\theta}_u^+(f), \quad \check{\theta}^-(f) = \check{\theta}_u^-(f), \quad \hat{\theta}^+(f) = \hat{\theta}_u^+(f), \quad \hat{\theta}^-(f) = \hat{\theta}_u^-(f).$$

Определение 3. Скажем, что система (1) обладает нижней или верхней полной (соответственно u -радиальной вдоль некоторой кривой q_u в направлении вектора $u \in S_1$): вращаемостью, если выполнены соответственно условия

$$\check{\theta}^-(f) > 0 \quad (\check{\theta}_u^-(f) > 0), \quad \hat{\theta}^-(f) > 0 \quad (\hat{\theta}_u^-(f) > 0),$$

невращаемостью, если выполнены соответственно условия

$$\check{\theta}^+(f) = 0 \quad (\check{\theta}_u^+(f) = 0), \quad \hat{\theta}^+(f) = 0 \quad (\hat{\theta}_u^+(f) = 0).$$

Теорема 2. Система (1) обладает полной (соответственно u -радиальной вдоль кривой q_u при $u \in S_1$) нижней вращаемостью или верхней невращаемостью тогда и только тогда, когда для некоторого $\alpha > 0$ или любого $\varepsilon > 0$ при каждом достаточно большом $t > 0$ для достаточно малого $\delta > 0$ при всех $x_0 \in \mathbb{B}_\delta$ (соответственно $x_0 \in \mathbb{B}_\delta \cap q_n$) выполнено неравенство

$$\frac{1}{t}\Theta(t, x(\cdot, x_0)) > \alpha \quad \text{или} \quad \frac{1}{t}\Theta(t, x(\cdot, x_0)) < \varepsilon,$$

а верхней вращаемостью или нижней невращаемостью — тогда и только тогда, когда аналогичное условие выполнено уже не при каждом достаточно большом $t > 0$, а хотя бы при одном $t > T$, превышающем произвольное наперед заданное $T > 0$.

Теорема 3. Система (1) для какого-либо $u \in S_1$ обладает некоторым u -радиальным свойством (нижней или верхней вращаемостью или невращаемостью) тогда и только тогда, когда она обладает одноименным полным свойством.

Утверждение теоремы 3 не переносится на колеблемость (неколеблемость) и блуждаемость (неблуждаемость) системы (1).

Литература

1. Сергеев И.Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. заметки. — 2016. — Т. 99, № 5. — С. 732–751.
2. Сергеев И.Н. О различных радиальных свойствах дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2025. — Т. 61, № 5. — С. 596–605.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ¹

Д.Н. Сидоров, В.Ф. Чистяков, Е.В. Чистякова
(Иркутск, ИРНИТУ, ИДСТУ СО РАН)

elena.chistyakova@icc.ru

В докладе рассматриваются линейные системы интегральных уравнений общего вида

$$A(t)x(t) + \int_{\alpha}^t K(t,s)x(s)ds = \varphi(t), \quad t \in T = (\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

где $A(t)$ и $K(t,s)$ — $(\nu \times n)$ -матрицы, $x(t)$ — искомая вектор-функция, $\varphi(t)$ — заданная вектор-функция,

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s), & t,s \in \mu_1 \\ \vdots & \\ K_m(t,s), & t,s \in \mu_m \end{cases},$$

$\mu_i = \{t,s \mid a_{i-1}(t) < s < a_i(t)\}$, $a_0(t) = \alpha$, $a_m(t) = t$, $i = \overline{1,m}$, $a_i(t)$, $\varphi(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, $K_i(t,s)$ имеют непрерывные производные по t для $t, s \in \mu_i$,

$$a_i(\alpha) = \alpha, \quad 0 < a_1(t) < a_2(t) < \dots < a_{m-1}(t) < t,$$

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FZZS-2024-0003).

© Сидоров Д.Н., Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В., 2026

$a_1(t), \dots, a_{m-1}(t)$ возрастают в малой окрестности $\alpha \leq t \leq \alpha + \tau$. Таким образом, на кривых $a_i(t)$ (эндогенных кривых запаздывания) ядро $K(t, s)$ претерпевает разрыв 1-го рода. Функции $K_i(t, s)$ на соответствующих $a_i(t)$ могут быть продолжены по непрерывности.

Можно записать

$$\int_{\alpha}^t K(t, s)x(s)ds = \int_{\alpha}^{a_1(t)} K_1(t, s)x(s)ds + \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} K_2(t, s)x(s)ds + \dots + \int_{a_{m-1}(t)}^t K_m(t, s)x(s)ds.$$

Системы (1) изучаются при выполнении одного из условий

$$\text{rank } A(t) < \min\{\nu, n\} \quad \forall t \in T, \quad (2)$$

$$\text{rank } A(t) = \min\{\nu, n\} \quad \forall t \in T. \quad (3)$$

Системы (1) называются *замкнутыми*, если $\nu = n$, *переопределенными*, если $\nu > n$, и *недоопределенными*, если $\nu < n$. Для замкнутой системы условие (2) эквивалентно равенству

$$\det A(t) = 0 \quad \forall t \in T, \quad (4)$$

а условие (3) — неравенству

$$\det A(t) \neq 0 \quad \forall t \in T. \quad (5)$$

Системы (1), удовлетворяющие условию (2), называют интегро- алгебраическими уравнениями (ИАУ), а системы удовлетворяющие второму условию (3) регулярными системами интегральных уравнений.

Данные уравнения применяются при построении математических моделей в физике, экономике и экологии [1].

Достаточно хорошо известно, что при наличии разрывных ядер решения ИАУ могут зависеть от произвольных постоянных. В докладе намечен подход к анализу ИАУ с разрывными ядрами и обсуждается численное решение таких задач.

Литература

1. Сидоров Д.Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения / Д.Н. Сидоров. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. — 293 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ФИЗИКО-ИНФОРМИРОВАННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ

В.Ю. Смирнов, А.Ю. Артёмов (Москва, МАИ)

artemov-04@inbox.ru

Проектирование современных узлов микроэлектроники требует оперативного анализа тепловых режимов работы компонентов. Классические методы, такие как метод конечных элементов (МКЭ) или метод конечных разностей (МКР), обладают высокой вычислительной сложностью при построении адаптивных сеток. В связи с этим актуальной задачей является разработка «цифровых двойников» на базе нейросетевых моделей, учитывающих физические ограничения системы.

В данной работе рассматривается процесс распределения тепла на поверхности печатной платы рассматривается как задача аппроксимации решения линейного дифференциального уравнения в частных производных (PDE). В упрощенном виде уравнение теплопроводности для двумерного случая записывается следующим образом [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (1)$$

где:

$T(x, y, t)$ — искомая функция распределения температуры;

α — обобщенный коэффициент диффузии (теплопроводности);

$f(x, y, t)$ — функция внешнего воздействия, описывающая локализованный нагрев от электронных компонентов.

Обозначим аппроксимацию температурного поля $T(\mathbf{x}, t)$ как $\hat{T}(\mathbf{x}, t; \theta)$. Обучение сети заключается в минимизации суммарного функционала ошибки \mathcal{L}_{total} , включающего невязку уравнения теплопроводности [2],

$$\mathcal{L}_{PDE} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \left| \frac{\partial \hat{T}(\mathbf{x}_i, t_i)}{\partial t} - \alpha \nabla^2 \hat{T}(\mathbf{x}_i, t_i) - f(\mathbf{x}_i, t_i) \right|^2 \quad (2)$$

где производные вычисляются с помощью механизмов автоматического дифференцирования. Общая функция потерь принимает вид:

$$\mathcal{L}_{total} = \omega_1 \mathcal{L}_{PDE} + \omega_2 \mathcal{L}_{data} + \omega_3 \mathcal{L}_{BC, IC} \quad (3)$$

где \mathcal{L}_{data} — ошибка на экспериментальных данных, а $\mathcal{L}_{BC,IC}$ — невязка граничных и начальных условий.

Для подтверждения адекватности разработанной модели PINN был спроектирован и изготовлен аппаратно-программный измерительный комплекс. Целью эксперимента является получение временного ряда температур в контрольной точке для решения обратной задачи и валидации численного решения. Конструкция стенда включает следующие компоненты: Печатная плата на базе контроллера TR4056, термopара К-типа с интерфейсом на базе АЦП MAX6675, микроконтроллер Arduino Nano, стенд из фанеры.

Эксперимент разделен на три этапа, каждый из которых интегрируется в вычислительную задачу:

1. *Сбор данных переходного процесса:* Запись кривой нагрева $T_{exp}(t)$ от начального состояния до установления стационарного режима. Полученные данные в координатах установки датчика \mathbf{x}_s используются в функции потерь нейросети:

$$\mathcal{L}_{data} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{T}(\mathbf{x}_s, t_i) - T_{exp}(t_i)|^2. \quad (4)$$

Здесь:

N — количество временных отсчетов, полученных с датчика;

\mathbf{x}_s — фиксированные координаты точки установки датчика на плате;

$T_{exp}(t_i)$ — экспериментальное значение температуры, зафиксированное датчиком в момент времени t_i .

2. *Решение обратной задачи:* Параметр теплопроводности α в уравнении невязки не задается априорно, а объявляется обучаемым параметром сети. В процессе минимизации \mathcal{L}_{total} нейросеть идентифицирует значение α , при котором математическая модель наиболее точно аппроксимирует экспериментальные точки. Использование экспериментальных данных как части процесса оптимизации позволяет рассматривать разрабатываемую модель как **физический цифровой двойник** реального устройства.

Научная новизна работы заключается в реализации гибридного подхода, объединяющего вычислительную модель с данными натурального эксперимента.

Разработан измерительный стенд на базе микроконтроллера Arduino Nano и термopары К-типа (АЦП MAX6675), обеспечивающий дискретизацию температурного профиля чипа в реальном времени. Применение PINN-архитектуры позволило успешно решить

обратную задачу теплопроводности — идентификацию коэффициента теплопроводности материала печатной платы (α) путем минимизации \mathcal{L}_{data} . Точность полученного решения подтверждена сопоставлением с классической конечно-разностной схемой (МКР). Результаты работы показывают, что бессеточный метод PINN является эффективным инструментом для создания самокалибрующихся систем теплового мониторинга. Интеграция фундаментальных физических законов в процесс обучения нейронных сетей позволяет значительно повысить точность аппроксимации при ограниченном объеме экспериментальных данных.

Литература

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский — М. : МГУ, 2004. — 798 с.
2. Raissi M. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations / M. Raissi, P. Perdikaris, G.E. Karniadakis // Journal of Computational Physics — 2019. — Vol. 378, — P. 686–707.

О ПОЛИНОМАХ ТИПА ЭРМИТА-ФЕЙДЕРА В СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ

Ю.С.Солиев (Москва, МАДИ, МТУСИ)

su1951@mail.ru

Рассмотрим понимаемый в смысле главного значения по Коши сингулярный интеграл

$$If = I(f; x) = \int_{-1}^1 p(t) \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

где $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, а $f(x)$ — заданная плотность интеграла.

Через $H_{n,m}f = H_{n,m}(f; x)$ обозначим полином типа Эрмита-Фейдера [1] степени $mn - 1$, удовлетворяющий условиям $H_{n,m}(f; x_k) = f(x_k)$, $H_{n,m}^{(j)}(f; x_k) = 0$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m-1}$.

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом $H_{n,m}f$, получим квадратурную формулу

$$If = I(H_{n,m}f; x) + R_{n,m}f, \quad (2)$$

где $R_{n,m}f = R_{n,m}(f; x)$ — остаточный член.

В работах [1],[2] рассмотрены квадратурные формулы вида (2) при $m=2$ и $m=4$ с узлами Чебышева и Якоби.

Следуя [3], рассмотрим случай, когда $m = 3$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, а $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi$ ($k = \overline{1, n}$) — нули полинома Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(\arccos x)$. Тогда формула (2) принимает вид

$$If = I(H_{n,3}f; x) + R_{n,3}f = \sum_{k=1}^n A_k(x)f(x_k) + R_{n,3}f, \quad (3)$$

$$A_k(x) = B_k(x) + C_k(x) + D_k(x),$$

$$B_k(x) = \frac{(-1)^{k+1}\pi(1-xx_k)\sqrt{(1-x_k^2)}}{4n^3} \left(\frac{1-xx_k}{(x-x_k)^3} K_n(x, x_k) - \right. \\ \left. - \frac{2x_k(1-xx_k)(-1)^{k+1}}{(x-x_k)^2(1-x_k^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(-1)^{k+1}((3n^2-2)x_k^2-3n^2-1)}{(x-x_k)(1-x_k^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

$$C_k(x) = \frac{(-1)^k \pi x_k \sqrt{(1-x_k^2)}}{8n^3} \left(\frac{K_n(x, x_k)}{(x-x_k)^2} - \frac{2x_k(-1)^{k+1}}{(x-x_k)(1-x_k^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

$$D_k(x) = \frac{(-1)^{k+1}\pi(n^2-1)\sqrt{(1-x_k^2)}}{8n^3(x-x_k)} K_n(x, x_k),$$

$$K_n(x, x_k) = U_{3n-1} + 3U_{n-1} - \frac{2(-1)^{k+1}}{\sqrt{(1-x_k^2)}}, U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

полином Чебышева второго рода.

Через $H_\mu(M; [-1; 1])$ обозначим класс функций $f(x)$, определенных на $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию Гельдера:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\mu, \quad x_1, x_2 \in [-1, 1], \quad 0 < \mu \leq 1.$$

Теорема 1. Пусть $f(x) \in H_\mu(M; [-1, 1])$, $0 < \mu \leq 1$. Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (3) справедлива оценка

$$R_{n,3}f|_C = O(n^{-\mu} \ln^2 n).$$

Пусть $m = 4$, $\alpha = \beta = 0$, а x_k ($-1 = x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1 = 1$) — нули полинома $(1-x^2)P_{n-2}(x)$, где $P_n(x)$ — полином Лежандра степени n . Следуя работе [4], рассмотрим полином $H_{n,4}f = H_{n,4}(f; x)$, степени $4n-7$, удовлетворяющий условиям $H_{n,4}(f; x_k) = f(x_k)$,

$H_{n,4}^{(j)}(f; x_k) = 0$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, 3}$, $H_{n,4}(f; -1) = f(-1)$, $H_{n,4}(f; 1) = f(1)$. Тогда квадратурная формула (2) примет вид

$$If = I(H_{n,4}f; x) + R_{n,4}f = \sum_{k=1}^n F_k(x)f(x_k) + R_{n,4}f. \quad (4)$$

Коэффициенты $F_k(x)$ квадратурной формулы (4) вычисляются аналогично вычислению коэффициентов квадратурной формулы (3). Приведем оценку остаточного члена.

Теорема 2. Пусть $f(x) \in H_\mu(M; [-1, 1])$, $0 < \mu \leq 1$. Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (4) справедлива оценка

$$\|R_{n,4}f\|_C = O\left(n^{-1} \ln^{1+[\mu]} n\right)$$

($[\mu]$ - целая часть целая часть μ).

Литература

1. Солиев Ю.С. О применении полиномов типа Эрмита-Фейера к приближенному вычислению сингулярных интегралов // Современные проблемы теории функций и их приложения. Сборник статей. Выпуск 23. Саратов, —2026, — С.262–265.

2. Солиев Ю.С. О применении полиномов Крылова-Штаермана к приближенному вычислению сингулярных интегралов // Материалы ВЗМШ-2026. Воронеж. — 2026. — С.238-240.

3. Byrne J., Mills T.M., Smith S.J. On Hermite-Fejer type interpolation on the Chebyshev nodes // Bull. Austral Math. Soc. Vol.47. — 1993. — P. 13-24.

4. Prasad J. On Hermite and Hermite-Fejer interpolation of higher order // Demonstratio Mathematica. — Vol.26. №2. — 1993. — P. 413-425.

О СИСТЕМЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С КАУЗАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ¹

М.С. Сорока (Воронеж, ВГУ)

marya.afanasowa@yandex.ru

Пусть E_1, \dots, E_n — сепарабельные банаховы пространства, $E = E_1 \times \dots \times E_n$. Символом C обозначим $C([0, T]; E_1) \times C([0, T]; E_2) \times \dots \times C([0, T]; E_n)$.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 23-71-10026).

© Сорока М.С., 2026

В работе исследуется система функциональных включений следующего вида

$$\begin{cases} x_1(t) \in \mathcal{G}_1(t)x_1^0 + \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{Q}_1(x_1, x_2, \dots, x_n)(t), & t \in [0, T]; \\ x_2(t) \in \mathcal{G}_2(t)x_2^0 + \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{Q}_2(x_1, x_2, \dots, x_n)(t), & t \in [0, T]; \\ \vdots \\ x_n(t) \in \mathcal{G}_n(t)x_n^0 + \mathcal{S}_n \circ \mathcal{Q}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)(t), & t \in [0, T]; \end{cases}$$

где $\mathcal{Q}_i : \mathcal{C} \rightarrow Cv(L^{p_i}([0, T]; E_i))$ — многозначные каузальные операторы с замкнутыми выпуклыми значениями, $\mathcal{S}_i : L^{p_i}([0, T]; E_i) \rightarrow C([0, T]; E_i)$ — линейные каузальными операторы, $x_i \in C([0, T]; E_i)$, оператор-функции $\mathcal{G}_i(\cdot)$ заданы следующим соотношением

$$\mathcal{G}_i(t) = \int_0^\infty \xi_{q_i}(\theta) U_i(t^{q_i} \theta) d\theta,$$

в котором $\xi_{q_i}(\cdot)$ определены по формуле $\xi_{q_i}(\theta) = \frac{1}{q_i} \theta^{-1 - \frac{1}{q_i}} \Psi_{q_i}(\theta^{-1/q_i})$, $\Psi_{q_i}(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \theta^{-q_i n - 1} \frac{\Gamma(nq_i + 1)}{n!} \sin(n\pi q_i)$, $\theta \in \mathbb{R}^+$, а $U_i(\cdot)$ — C_0 -полугруппы, $i = 1, \dots, n$.

Система рассматривается в предположении, что она удовлетворяет начальным условиям

$$x_1(0) = x_1^0 \in E_1, \quad x_2(0) = x_2^0 \in E_2, \quad \dots, \quad x_n(0) = x_n^0 \in E_n.$$

Основным результатом работы является глобальная теорема существования траекторий для систем, описываемых функциональными включениями. Доказательство основано на теории топологической степени для уплотняющих многозначных отображений. В качестве приложений основного результата получены обобщенные теоремы существования для систем двух важных классов: полулинейных дифференциальных включений первого порядка и полулинейных дифференциальных включений дробного порядка из интервала $(0, 1)$.

Литература

1. Afanasova M. A controllability problem for causal functional inclusions with an infinite delay and impulse conditions / M. Afanasova, V. Obukhovskii, G. Petrosyan // *Advances in Systems Science and Applications*. — 2021. — Vol. 21, no 3. — P. 40–62.
2. Afanasova M. On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach

space. / M. Afanasova, Y. Ch. Liou, V. Obukhovskii, G. Petrosyan // Journal of Nonlinear and Convex Analysis. — 2019. — Vol. 20, no 9. — P. 1919–1935.

3. Ahmerov R.R. Measures of Noncompactness and Condensing Operators / R.R. Ahmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovskii. — Boston–Basel–Berlin. : Birkhauser, 1992. — 252 c.

4. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin–New York. : Walter de Gruyter, 2001. — 254 p.

5. Kilbas A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. — Amsterdam. : Elsevier Science B.V, 2009. — 523 p.

6. Obukhovskii V. Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications / V. Obukhovskii, B. Gel'man. — Hackensack, NJ. : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2020. — 220 p.

7. Obukhovskii V. On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces. / V. Obukhovskii, P. Zecca // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. — 2011. — Vol. 74, iss. 8. — P. 2765–2777.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ОДНОЙ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.В. Степанов (Санкт-Петербург, ВНИИМ им. Д.И. Менделеева)
stepanov17@yandex.ru

Рассмотрим следующую систему управления с запаздыванием в линейном объекте и существенно нелинейным управлением (реле с гистерезисом):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + cu(t), \quad u(t) = f(\sigma(t)), \quad \sigma(t) = \gamma'x(t), \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, A, B — постоянные матрицы размера $n \times n$, $c, \gamma \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание. Гистерезисная характеристика

$f(\sigma)$ имеет вид

$$f(\sigma) = \begin{cases} m_1, & \sigma \leq l_2, \\ m_2, & \sigma \geq l_1, \end{cases} \quad l_1 < l_2, \quad m_1 < m_2,$$

при этом $f(\sigma(t)) = f(\sigma(t-0))$.

Предположим, что при $B = 0$ система имеет T_0 -периодический режим $x_0(t)$ с временами перехода t_1^0, t_2^0 ($T_0 = t_1^0 + t_2^0$) и точками переключения

$$x_1^0 = x_0(0), \quad x_2^0 = x_0(t_1^0), \quad \gamma' x_1^0 = l_1, \quad \gamma' x_2^0 = l_2.$$

Пусть

$$\gamma'(Ax_i^0 + cm_i) \neq 0, \quad i = 1, 2; \quad \tau < \min(t_1^0, t_2^0).$$

Для невозмущённого режима при $B = 0$ известен критерий орбитальной асимптотической устойчивости [1]: $\rho(M_0) < 1$, где

$$M_0 = \left(I - \frac{(Ax_2^0 + cm_2)\gamma'}{\gamma'(Ax_2^0 + cm_2)} \right) e^{At_1^0} \left(I - \frac{(Ax_1^0 + cm_1)\gamma'}{\gamma'(Ax_1^0 + cm_1)} \right) e^{At_2^0}.$$

Теорема 1. Пусть при $B = 0$ выполнены указанные выше условия и $\rho(M_0) < 1$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех матриц B с $\|B\| < \varepsilon_0$ система (1) имеет единственный (локально) T -периодический режим, близкий к $x_0(t)$. Этот режим орбитально асимптотически устойчив, а его параметры t_1, t_2, x_1, x_2 непрерывно зависят от B . При $\|B\| \rightarrow 0$ имеем: $T \rightarrow T_0, x(t) \rightarrow x_0(t)$ равномерно на $[0, T_0]$.

Заметим, что определяющим является именно условие $\rho(M_0) < 1$ (а не, например, гурвицевость матрицы A).

Литература

1. Зубов С.В. Математические методы стабилизации динамических систем / С.В. Зубов, Н.В. Зубов. — СПб. : Издательство СПбГУ, 1996. — 288 с.

КОРРЕКТНОСТЬ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ С УЧЕТОМ ПАМЯТИ ДВИЖЕНИЯ¹

М.И. Струков, А.В. Звягин (Воронеж, ВГУ)

mixail.strukov12@gmail.com, zvyagin.a@mail.ru

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-71-10026).
© Струков М.И., Звягин А.В., 2026

В ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с достаточно гладкой границей, на временном интервале $[0, T]$, $T > 0$ рассматривается задача (см. [1]–[5]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\mu_1 \operatorname{Div} \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \right) - \\ - 2\mu_1 \operatorname{Div} \left(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho \mathcal{E}(v) \right) - \\ - \frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = f, \end{aligned} \quad (1)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$v|_{t=0} = v_0, \quad v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = 0. \quad (4)$$

Здесь $v(x, t) = (v_1, \dots, v_n)$ — вектор-функция скорости движения частицы среды, $p = p(x, t)$ — функция давления, $f = f(x, t)$ — функция плотности внешних сил, $z(\tau, t, x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени τ расположение частицы жидкости, находящейся в момент времени t в точке x , $\mu_0, \mu_1 > 0$, $\mu_2 \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ — некоторые константы. $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij}(v))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$,

$\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор скоростей деформаций. $W(v) =$

$(W_{ij}(v))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$, $W_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор завихренности.

$W_\rho(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y) W(y) dy$, где $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкая функция с компактным носителем, такая что $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами.

Определение 1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^1$. Слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4) называется функция $v \in W_1 = \{v : v \in L_\infty(0, T, V^1), v' \in L_2(0, T, V^1)\}$, удовлетворяющая начальному условию $v(0) = v_0$ и равенству

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} \varphi dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx - \\ - \mu_1 \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \mu_1 \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mu_1 \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) : \nabla \varphi \, dx + 2\mu_1 \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi \, dx + \\
& + \frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(v)(s; t, x)) \, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Тогда начальная краевая задача (1)–(4) имеет хотя бы одно слабое решение $v \in W_1$.

Литература

1. Звягин А.В. Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2011. — Н. 1. — С. 147–156.
2. Звягин А.В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения неньютоновой жидкости в неограниченной области / А.В. Звягин // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. — 2012. — Н.2. — С. 118–121.
3. Звягин А.В. Атракторы для модели движения полимеров с объективной производной в реологическом соотношении / А.В. Звягин // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 453, Н. 6. — С. 599–602.
4. Звягин А.В. Разрешимость альфа-моделей гидродинамики / А.В. Звягин, В.Г. Звягин, Д.М. Поляков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2016. — Н. 2. — С. 72–93.
5. Звягин А.В. Исследование разрешимости термовязкоупругой модели, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Сибирский математический журнал. — 2018. — Т. 59, Н. 5. — С. 1066–1085.

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

Л.И. Сухочева (Воронеж, ВГУ)

l.suchocheva@yandex.ru

Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — симметрический положительный оператор, λ_{min} и λ_{max} соответственно наименьшее и наибольшее его собственные значения, тогда следующие два неравенства эквивалентны [1]:

$$\sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} \leq 2\sqrt{\frac{n}{n-1}}, \tag{1}$$

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \leq \frac{(\sqrt{n} + 1)^2}{n - 1}. \quad (2)$$

Пусть x — произвольный элемент \mathbb{R}^n ($x \in \mathbb{R}^n$) с $\|x\| = 1$, обозначим $\{e_i\}$, $i = 2, 3, \dots, n$ множество всех ортонормированных базисов в подпространстве $\{x\}^\perp$. Эквивалентность соотношений (1) и (2) является следствием следующего

Утверждения.

$$(Ax, x) \geq \max\{(Ae_2, x) + \dots + (Ae_n, x)\}, \quad (3)$$

где максимум берется по всевозможным $\{e_i\}$, $i = 2, 3, \dots, n \subset \{x\}^\perp$, имеет место тогда и только тогда, когда

$$(Ax, x) \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}} \|Ax\|. \quad (4)$$

Заметим, что (3) равносильно условию: в любом ортонормированном базисе $\{e_i\}$, $i = 2, 3, \dots, n \subset \{x\}^\perp$ будет

$$(x - e_2 - e_3 - \dots - e_n, Ax) \geq 0.$$

Серия равносильных неравенств доказывает эквивалентность (1) и (2). Эти соотношения являются ключевыми для доказательства критерия представления положительного оператора в конечномерном пространстве в виде матрицы с доминирующей главной диагональю в каждом ортонормированном базисе \mathbb{R}^n [1].

Литература

1. Сухочева Л.И. О некоторых спектральных свойствах квадратичного самосопряженного пучка матриц с доминирующими главными диагоналями, Матем. заметки, т. 61(3), (1997), С. 381-390.

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДВУХМАГНОННЫХ СИСТЕМ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА С ОДНОИОННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ И С ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ БЛИЖАЙШИХ И ВТОРЫХ СОСЕДЕЙ

С.М. Ташпулатов (ИЯФ АН РУз., Ташкент, Узбекистан)
sadullatashpulatov@yandex.com

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = J \sum_{m,\tau} [(\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}) + \alpha \sum_{m,\tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+2\tau})] - H \sum_m S_m^z, \quad (1)$$

где $J < 0$ – параметр билинейного обменного взаимодействия для ближайших соседей, $0 \leq \alpha \leq 1$ – отношение параметра билинейного обменного взаимодействия для вторых соседей к параметру билинейного обменного взаимодействия для ближайших соседей, $H = g\mu_B B$, g – параметр, $g \approx 2,2$ – гиромагнитный констант, μ_B – магнетон Бора, B – интенсивность магнитного поля, $\vec{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ – оператор атомного спина величины $s = 1/2$ в узле m , а по τ ведется суммирование по ближайшим соседям. Положим $S_m^\pm = S_m^x \pm iS_m^y$, где S_m^+ и S_m^- соответственно, операторы рождения и унижтожения магнона в узле m . Гамильтониан (1) действует в симметрическом Фоковском пространстве \mathcal{H} . Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями $S_m^+ \varphi_0 = 0$, $S_m^z \varphi_0 = (1/2)\varphi_0$, где $\|\varphi_0\| = 1$. Векторы $\{S_m^- S_n^- \varphi_0\}$ описывает состояние системы двухмагнонов, находящегося в узлах m и n , со значениями спина $s = 1/2$. Пространство, натянутое на эти векторы, обозначим через $\tilde{\mathcal{H}}_2$. Оно называется пространством двухмагнонных состояний оператора H . Обозначим через H_2 сужение оператора H на подпространстве $\tilde{\mathcal{H}}_2$.

Теорема 1. *Пространство $\tilde{\mathcal{H}}_2$ инвариантно относительно оператора H . Оператор H_2 является ограниченным самосопряженным оператором, который порождает ограниченный самосопряженный оператор \bar{H}_2 , действующей в пространстве $l_2((Z^\nu)^2)$ по формуле*

$$\begin{aligned} (\bar{H}_2 f)(p, q) = & J \sum_{\tau} \{ (\delta_{p, q+\tau} + \delta_{p+\tau, q} - 2) f(p, q) - \frac{1}{2} \delta_{p-\tau, q} f(p-\tau, q) - \\ & - \frac{1}{2} \delta_{p, q-\tau} f(p, q-\tau) - \frac{1}{2} \delta_{p+\tau, q} f(p+\tau, q) - \frac{1}{2} \delta_{p, q+\tau} f(p, q+\tau) + \frac{1}{2} f(p-\tau, q) + \\ & + \frac{1}{2} f(p, q-\tau) + \frac{1}{2} f(p+\tau, q) + \frac{1}{2} f(p, q+\tau) \} + \alpha \{ (\delta_{p+2\tau, q} + \delta_{p, q+2\tau} - 2) f(p, q) - \\ & - \frac{1}{2} \delta_{p, q-2\tau} f(p, q-2\tau) - \frac{1}{2} \delta_{p-2\tau, q} f(p-2\tau, q) - \frac{1}{2} \delta_{p, q+2\tau} f(p, q+2\tau) - \\ & - \frac{1}{2} \delta_{p+2\tau, q} f(p+2\tau, q) + \frac{1}{2} f(p-2\tau, q) + \frac{1}{2} f(p, q-2\tau) + \frac{1}{2} f(p+2\tau, q) \} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}f(p, q + 2\tau)\} + 2Hf(p, q) \quad (2)$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера. Сам оператор H_2 на вектор $\psi \in \tilde{\mathcal{H}}_2$ действует по формуле

$$H_2\psi = \sum_{p,q} (\overline{H}_2 f)(p, q) S_p^- S_q^- \varphi_0. \quad (3)$$

Обозначим через \mathcal{F} преобразование Фурье: $\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^2) \rightarrow L_2((T^\nu)^2) \equiv \tilde{\mathcal{H}}_2$, где T^ν — ν - мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, т.е., $\lambda(T^\nu) = 1$.

Теорема 2. Преобразование Фурье переводит оператор \overline{H}_2 в ограниченный самосопряженный оператор \tilde{H}_2 , действующий в пространстве $L_2^{symm}((T^\nu)^2)$.

Пусть фиксирован полный квазиимпульс системы $x + y = \Lambda$. Обозначим через $L_2(\Gamma_\Lambda)$ пространство функций, квадратично интегрируемых по многообразию $\Gamma_\Lambda = \{(x, y) : x + y = \Lambda\}$. Известно [1], что оператор \tilde{H}_2 и пространство $\tilde{\mathcal{H}}_2$ можно разложить в прямой интеграл $\tilde{H}_2 = \int_{T^\nu} \oplus \tilde{H}_{2\Lambda} d\Lambda$, $\tilde{\mathcal{H}}_2 = \int_{T^\nu} \oplus \tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda} d\Lambda$ операторов $\tilde{H}_{2\Lambda}$ и пространств $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ так, что пространства $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ окажутся инвариантными относительно операторов $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

Пусть полный квазиимпульс системы $\Lambda = \pi$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\nu = 1$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = \pi$. Тогда оператор $\tilde{H}_{2\Lambda}$ имеет ровно три собственных значения $z_1 = 0$, $z_2 = -4J - H + \frac{2J\alpha^3}{1+\alpha}$ и $z_3 = -4J - H + \frac{2J(1+2\alpha)^2}{1+\alpha}$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

Литература

1. Наймарк М.А. Нормированные кольца / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1968. — 664 с.

ЛОГИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПРОГРАММА РЕАЛИЗАЦИИ КАЛЬКУЛЯТОРА РИСКА МЕТАСТАТИЧЕСКОГО ПОРАЖЕНИЯ РЕГИОНАРНЫХ ЛИМФАТИЧЕСКИХ УЗЛОВ ПРИ МЕЛАНОМЕ КОЖИ

Е.В. Тихонова, С.Н. Бердников, А.М. Сергеева
(Москва, НМИЦ онкологии им. Н. Н. Блохина, НИУ «МЭИ»)
elige-94@mail.ru, s.berdnikov@ronc.ru, Hmelevs@yandex.ru

© Тихонова Е.В., Бердников С.Н., Сергеева А.М., 2026

Меланома кожи характеризуется высокой метастатической активностью, при этом поражение регионарных лимфатических узлов является ключевым прогностическим фактором и определяет стадию заболевания и тактику лечения. Стандартный метод стадирования — биопсия сторожевого лимфатического узла — является инвазивным и сопровождается риском осложнений, что обуславливает необходимость разработки неинвазивных методов прогнозирования риска метастазирования.

Рассматривается задача бинарной классификации, в которой случайная величина $Y \in \{0, 1\}$ соответствует наличию метастатического поражения регионарных лимфатических узлов, а вектор признаков $x \in \mathbb{R}^n$ включает клинические характеристики пациента, параметры первичной опухоли, ультразвуковые и эластографические признаки лимфатических узлов, а также результаты сцинтиграфии и морфологической верификации.

Используется модель логистической регрессии:

$$\log \frac{p(x)}{1 - p(x)} = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i. \quad (1)$$

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \sum \beta_i x_i)}}. \quad (2)$$

Оценка параметров осуществляется методом максимального правдоподобия:

$$\ell(\beta) = \sum_{j=1}^N [y_j \log p(x_j) + (1 - y_j) \log(1 - p(x_j))]. \quad (3)$$

Построенная модель продемонстрировала высокую дискриминационную способность: $AUC \approx 0,95$.

Оптимальный порог классификации определялся по индексу Юдена:

$$J = Se + Sp - 1. \quad (4)$$

При $p^* = 0,272$ достигается баланс характеристик: $Se \approx 0,85$, $Sp \approx 0,96$, $Acc \approx 0,93$.

На основе модели реализован программный калькулятор, вычисляющий вероятность $p(x)$ и категорию риска пациента.

Таким образом, предложенная модель представляет собой интерпретируемый инструмент статистического обучения с высокой прогностической точностью и практической применимостью.

ВЕКТОРНАЯ ЭНТРОПИЙНАЯ МОДЕЛЬ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ

А.Н. Тырсин (Екатеринбург, УрФУ)
at2001@yandex.ru

Адаптивные системы способны изменять поведение и свою структуру с целью сохранения или достижения оптимального состояния при изменении внешних условий. Векторная энтропийная модель [1] позволяет исследовать поведение таких систем. Представим систему в виде непрерывного случайного вектора $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$, компоненты которого имеют дисперсии $\sigma_{Y_j}^2$. Дифференциальная энтропия (далее, энтропия) $H(\mathbf{Y})$ состоит из энтропийных мер хаотичности $H_V(\mathbf{Y})$ и самоорганизации (зависимости) $G_R(\mathbf{Y})$ [2]

$$H(\mathbf{Y}) = H_V(\mathbf{Y}) - G_R(\mathbf{Y}), \quad (1)$$

где $H_V(\mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^m \ln \sigma_{Y_j} + \sum_{i=j}^m \kappa_j$, $\kappa_j = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Y_j^0}(x) \ln p_{Y_j^0}(x) dx$ - энтропии по плотностям одномерных случайных величин с единичными дисперсиями, $Y_j^0 = Y_j / \sigma_{Y_j}$, $G_R(\mathbf{Y}) = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^m \ln(1 - R_{Y_k|Y_1 \dots Y_{k-1}}^2)$, $R_{Y_k|Y_1 \dots Y_{k-1}}^2$ - индекс детерминации регрессионной зависимости случайной величины Y_k от случайных величин $Y_1 \dots Y_{k-1}$.

Энтропийная мера $H_V(\mathbf{Y})$ одновременно характеризует изменения в поведении системы, вызванные, как неслучайной динамикой (трендом) свойств системы, так и эффектом случайности. Поэтому поведение во времени каждой компоненты Y_j системы представляет собой случайный процесс, состоящий из суммы взаимно независимых тренда \tilde{Y}_j и случайной составляющей (шум) ε_j , т. е. $Y_j = \tilde{Y}_j + \varepsilon_j$ и $\sigma_{Y_j}^2 = \sigma_{\tilde{Y}_j}^2 + \sigma_{\varepsilon_j}^2$.

Учитывая, что $\ln \sigma_{Y_j} = \ln \sigma_{\tilde{Y}_j} + \ln \left(\frac{\sigma_{Y_j}}{\sigma_{\tilde{Y}_j}} \right)$, вместо разложения (1) имеем

$$H(\mathbf{Y}) = H_D(\mathbf{Y}) + H_S(\mathbf{Y}) - G_R(\mathbf{Y}), \quad (2)$$

где $H_D(\mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^m \ln \sigma_{\tilde{Y}_j} + \sum_{j=1}^m \kappa_j$ - энтропийная мера динамичности, $H_S(\mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^m \ln \left(\frac{\sigma_{Y_j}}{\sigma_{\tilde{Y}_j}} \right) \geq 0$ - энтропийная мера случайности.

Энтропийная мера случайности оценивается в безразмерной шкале. Это позволит стандартизировать оценку стабильности поведения анализируемой системы. Минимум $H_S(\mathbf{Y})$ соответствует величине 0, при этом все $\sigma_{Y_j} = \sigma_{\tilde{Y}_j}$, т. е. $\varepsilon_j = 0$.

Мониторинг состояния системы можно выполнять следующим образом. Поступательность развития системы можно описать как поведение вектора $(H_V(\mathbf{Y}), G_R(\mathbf{Y}))$. Эта величина позволяет учесть, как общую траекторию развития, так и локальные флуктуации, и в $H_V(\mathbf{Y})$, и в $G_R(\mathbf{Y})$. Устойчивость системы будем трактовать в виде вектора $(H_D(\mathbf{Y}), H_S(\mathbf{Y}))$, характеризующего относительные флуктуации энтропийной меры динамичности. Стабильность функционирования системы опишем с помощью энтропийной меры случайности $H_S(\mathbf{Y})$, чем она выше, тем менее стабильно функционирует система.

Литература

1. Тырсин А.Н. Векторное энтропийное моделирование многомерных стохастических систем. / А.Н. Тырсин. — М. : Наука, 2022. — 231 с.
2. Тырсин А.Н. Энтропийное моделирование сетевых структур / А.Н. Тырсин // Автоматика и телемеханика. — 2022. — № 10. — С. 144–155.

ЯВЛЕНИЕ ПОГРАНСЛОЯ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛУ)
vum1@yandex.ru

Рассмотрим задачу Коши:

$$A \frac{d^2 u}{dt^2} = (B + \varepsilon D) \frac{du}{dt} + Cu(t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$u(0, \varepsilon) = u^0(\varepsilon), \quad \frac{du}{dt}(0, \varepsilon) = u^1(\varepsilon), \quad (2)$$

где заданы: A, B, C, D — ограниченные линейные операторы, действующие из банахова пространства \mathcal{X}_1 в банахово пространство \mathcal{X}_2 ; $u^0(\varepsilon), u^1(\varepsilon)$ — голоморфные в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функции из \mathcal{X}_1 ; $t \in \mathfrak{T} = [0; t_k], \varepsilon \in \mathfrak{E} = (0; \varepsilon_0)$.

Оператор A полагается фредгольмовым с нулевым индексом. Исследуется случай обладания им одномерным ядром.

Целью работы является определение условий, при которых возникает явление пограничного слоя (далее, погранслоя) [1], [2] вблизи точки $t = 0$. Такие условия называются условиями регулярности вырождения.

Задача

$$A \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} = B \frac{d\bar{u}}{dt} + C\bar{u}(t) + f(t), \quad (3)$$

$$u(0) = \bar{u}^0, \quad \frac{d\bar{u}}{dt}(0) = \bar{u}^1, \quad (4)$$

называется предельной к задаче (1), (2).

Используется

Свойство. [3]

$$\mathcal{X}_1 = \text{Ker } A \oplus \text{Coim } A, \quad \mathcal{X}_2 = \text{Im } A \oplus \text{Coker } A,$$

где $\text{Coim } A$ — прямое дополнение к ядру $\text{Ker } A$, $\text{Coker } A$ — дефект; $\dim \text{Ker } A = \dim \text{Coker } A < \infty (= 1)$; сужение \tilde{A} оператора A на $\text{Coim } A$ имеет ограниченный обратный \tilde{A}^{-1} .

Введем проектор Q на $\text{Coker } A$, полуобратный оператор $A^- = \tilde{A}^{-1}(I - Q)$ (I обозначена единичная матрица в соответствующем подпространстве). Зафиксируем ненулевой элемент $z \in \text{Ker } A$, элемент $\psi \in \text{Coker } A$. В $\text{Coker } A$ определим скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ так, что $\langle \psi, \psi \rangle = 1$.

Получены следующие результаты.

Обозначим $S_{i_1, i_2, i_3}^{A^-B, A^-D, A^-C}$ сумму по всевозможным перестановкам из i_1 элементов A^-B , i_2 элементов A^-D , i_3 элементов A^-C .

Пусть выполнено

Условие 1.

$$\begin{aligned} S_{i_1, i_2, i_3}^{A^-B, A^-D, A^-C} &= \\ &= A^-B S_{i_1-1, i_2, i_3}^{A^-B, A^-D, A^-C} + A^-D S_{i_1, i_2-1, i_3}^{A^-B, A^-D, A^-C} + A^-C S_{i_1, i_2, i_3-1}^{A^-B, A^-D, A^-C}. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\Gamma_m = \{(i_1, i_2, i_3) : i_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad j = 1, 2, 3, \quad i_1 + i_2 + i_3 = m\},$$

$$H_{rs} = \frac{1}{r!s!} \frac{\partial^{r+s}}{\partial \lambda^r \partial \varepsilon^s} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\Gamma_m} \lambda^{i_1+i_2+2i_3} \varepsilon^{i_2} S_{i_1, i_2, i_3}^{A^-B, A^-D, A^-C} \Bigg|_{(\lambda, \varepsilon)=(0,0)},$$

$$\begin{aligned}
d_{00} &= \langle QBz, \psi \rangle, \quad d_{01} = \langle QDz, \psi \rangle, \\
d_{10} &= \langle (QBA^{-1}B + QC)z, \psi \rangle, \quad d_{11} = \langle (QBA^{-1}D + QDA^{-1}B)z, \psi \rangle, \\
d_{12} &= \langle QDA^{-1}Dz, \psi \rangle, \\
d_{i0} &= \langle (QBH_{i0} + QCH_{i-1,0})z, \psi \rangle, \\
d_{ij} &= \langle (QBH_{ij} + QDH_{i,j-1} + QCH_{i-1,j})z, \psi \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, i-1, \\
d_{ii} &= \langle (QBH_{ii} + QDH_{i,i-1})z, \psi \rangle, \\
d_{i,i+1} &= \langle QDH_{ii}z, \psi \rangle, \quad i = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Случай 1. Выполнено условие $d_{00} \neq 0$. В этом случае имеет место равномерная сходимость на \mathfrak{T} решения $u(t, \varepsilon)$ задачи (1), (2) к решению $\bar{u}(t)$ задачи (3), (4).

Случай 2. Выполнено условие 1, и существует число $q = \min\{i : i = 1, 2, \dots, p\}$, такое, что $d_{ij} = 0$, $j = 0, 1, \dots, i+1$, $i = 0, 1, \dots, p-2$, и $d_{p-1,q} \neq 0$. Тогда при выполнении условия

$$\operatorname{Re} \frac{d_{p-1,q}}{d_{p0}} > 0$$

имеет место явление погранслоя. Это условие является условием регулярности вырождения.

Литература

1. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.
2. Zubova S.P. The role of perturbations in the Cauchy problem for equations with a Fredholm operator multiplying the derivative / S.P. Zubova // Doklady Mathematics. — 2014. — Vol. 89. — P. 72–75.
3. Никольский С.М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах / С.М. Никольский // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1943. — Т. 7, вып. 3. — С. 147–166.

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МОДУЛЯ МОНИТОРИНГА АРТЕРИАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Д.Г. Усков (Воронеж, ВГУ)

uskov.dan@ru

Артериальное давление является одним из базовых показателей состояния сердечно-сосудистой системы и широко используется для раннего выявления рисков осложнений. Для практического мониторинга важны автоматизация, воспроизводимость результатов и устойчивость к помехам, возникающим при бытовых измерениях. В данной работе рассматривается подход, основанный на осциллометрическом измерении давления в манжете и последующей математической обработке временного ряда, позволяющей выделять пульсационные осцилляции и получать оценки систолического и диастолического давления.

На вход модели поступает аналоговый сигнал, получаемый с датчика давления и передаваемый на компьютер через микроконтроллер. Первым шагом выполняется валидация данных на предмет пустых/нереалистичных значений и ошибок чтения, после чего сигнал приводится к мм рт. ст. стандартным преобразованием из измеряемого аналогового уровня. Далее модель выделяет информативный фрагмент записи, соответствующий снижению давления в манжете после достижения максимума. На основе этих данных из массива измерений выбирается участок перехода от нагнетания к спаду, дополнительно отсекая значения, заведомо выходящие за ожидаемые пределы САД/ДАД. На этом же этапе предусмотрены контрольные проверки корректности сеанса на достаточную длительность, достижение уровня для полного пережатия артерии и т. п., чтобы отбрасывать измерения, физически не способные дать надежный результат.

Основную часть математической модели составляет выделение осцилляций из сигнала давления. Для этого используется оконная медианная фильтрация — для каждого значения берётся окно из 41 точки (центральная и 20 соседних слева и справа), по которому вычисляется медианная оценка, а осцилляционная компонента определяется как отклонение текущего значения от медианного фона. Такой подход устойчив к выбросам и не требует подбора сложной аппроксимационной функции при ручном нагнетании и неровном спуске давления. После выделения осцилляций выполняется подавление высокочастотного шума, как правило возникающего из-за движения руки или механических помех с помощью цифрового фильтра Чебышева 4-го порядка. Данный фильтр был выбран из-за резкого перехода между полосой пропускания и полосой подавления и приемлемой вычислительной сложности.

Финальным шагом модели является оценка давления по осцилляциям. Среди отфильтрованных осцилляционных значений выби-

рается экстремум по модулю; ему сопоставляется момент времени и исходное значение давления в манжете, что принимается как оценка систолического давления. Диастолическое давление в модуле вычисляется по коэффициентному правилу, а также дополнительно рассчитываются пульсовое и медианное давление для расширения диагностической информативности.

Таким образом, разработанная математическая модель представляет собой следующую последовательность: калибровка и очистка сигнала, выделение участка спуска, извлечение осцилляций медианным окном, частотная фильтрация, оценка САД/ДАД и производных показателей. Модель реализована в составе программного приложения и ориентирована на применение неквалифицированными пользователями при сохранении воспроизводимости результатов.

Литература

1. World health statistics 2023: monitoring health for SDGs, Sustainable Development Goals // World Health Organization. — Geneva : World Health Organization, 2023. — License: CC BY-NC-SA 3.0 IGO.
2. Яковлев В.М. Изолированная систолическая артериальная гипертензия в пожилом возрасте / В.М. Яковлев. — Ставрополь: Ставропольская государственная медицинская академия, 2018. — С. 331–353.
3. Усков Д.Г. Экспериментальное выделение осциллограмм, полученных при измерении артериального давления / Д.Г. Усков // Межвузовская научная конференция молодых ученых и студентов. — Воронеж, 2023. — С. 494–498.
4. Кошенин В.Б. Математическое моделирование гемодинамики сердечно-сосудистой системы с учетом влияния нейрорегуляции / В.Б. Кошенин // Математическое моделирование: сборник научных трудов. — М.: ВГИЛ, 2007. — С. 15–28.

ВЛИЯНИЕ КВАДРАТИЧНОГО СЛАГАЕМОГО В НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННУЮ ДИНАМИКУ НЕПРЕРЫВНОЙ САМООРГАНИЗУЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

Д. Д. Федулов (Ярославль, ЯрГУ)
mr.fedulow@yandex.ru

Настоящая работа посвящена исследованию краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \mu u - \gamma u^2 - u^3, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left(\beta \frac{\partial v}{\partial x} + v \right) \Big|_{x=1} = \beta (\mu u - \gamma u^2 - u^3) \Big|_{x=1}, \quad (2)$$

возникающей как континуальный предел ансамбля нелинейных осцилляторов с кубически-квадратичной локальной динамикой. Предельный случай $\gamma = 0$, отвечающий чисто кубической нелинейности, исследован в статье [1], а в настоящей работе изучается влияние дополнительного квадратичного слагаемого $-\gamma u^2$ на структуру и устойчивость режимов самоорганизации.

Случай ($\gamma = C\mu$, $\mu \ll 1$). Применяя стандартные асимптотические методы (см. [1]) к задаче (1)–(2), получаем укороченную систему уравнений на комплексные амплитуды критических мод:

$$\dot{\xi}_l = \left[\delta_l - d_l |\xi_l|^2 - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{\infty} d_{l,m} |\xi_m|^2 \right] \xi_l, \quad l \geq 1. \quad (3)$$

Динамические свойства решений системы (3) близки к свойствам решений системы, полученной для чисто кубической нелинейности [1]. В ней существуют одномодовые состояния равновесия:

$$O_l = \{(\eta_1, \eta_2, \dots) : \eta_l > 0, \quad \eta_m = 0 \text{ при всех } m \neq l\}. \quad (4)$$

Таким образом, при $\gamma = O(\mu)$ квадратичное слагаемое не влияет на наблюдаемый бифуркационный сценарий.

Численное моделирование задачи (1)–(2) при $C = 1$ подтверждает аналитические выводы.

Случай ($\gamma = O(1)$). В этой ситуации уравнения на амплитуды (3) сохраняют общую структуру, однако коэффициенты δ_l , d_l и $d_{l,m}$ принимают значения, существенно отличные от коэффициентов исходной системы. Это изменение коэффициентов приводит к качественному изменению динамики: могут меняться бифуркационные значения, отделяющие одномодовые состояния равновесия, а также могут возникать и исчезать новые многомодовые аттракторы.

Численное исследование задачи (1)–(2) выполнялось по всей двухпараметрической области (μ, γ) в рамках двух взаимодополняющих стратегий изменения параметров. В первой серии численных

экспериментов γ фиксировался, а μ увеличивался от малых значений параметра ($\mu \ll 1$) до значений порядка $O(1)$. Во второй серии фиксировался параметр μ , а γ увеличивалось от $O(\mu)$ до $O(1)$.

Оба подхода выявляют переход от однородных по моде к многомодовым режимам. При достаточно малых μ и γ наблюдаются исключительно одномодовые состояния равновесия. Увеличение γ при фиксированном μ , равно как и увеличение μ при фиксированном $\gamma = O(1)$, приводит к появлению дополнительных мод, приводя к устойчивости пространственно-временных режимов более высокой пространственно-временной сложности по сравнению со случаем $\gamma = 0$. Взаимодействие квадратичного слагаемого и стабилизирующего кубического слагаемого определяет формирование и устойчивость полученных структур.

Литература

1. Glyzin S. D. Dynamic Self-Organization in Neuron Systems / S. D. Glyzin, A. YuKolesov, D. D. Fedulov // Theoret. and Math. Phys. — 2025. — Vol. 65, No 4. — P. 917–934.
2. Glyzin S. D. Self-oscillatory processes in a discrete RCL-line with a tunnel diode / Glyzin S. D., Kolesov A. Yu. // Theoret. and Math. Phys. — 2023. — Vol. 215, No 2. — P. 636–651.

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ $\sin X$, $\cos X$

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E ; $L(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, определённых на E со значениями в E .

В некоторых случаях условимся называть элементы алгебры $L(E)$ операторными точками.

В дальнейшем потребуются ряд известных утверждений, которые в целях удобства ссылок на них сформулируем в виде замечаний.

Рассмотрим ряды (1) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, (2) $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ с членами их нормированного пространства \mathcal{N} .

Замечание 1. Если ряды (1), (2) сходятся, то ряд

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$ сходится и $S^{(3)} = S^{(1)} + S^{(2)}$, где $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ — суммы соответственно рядов (1), (2), (3) ([1, с.52]).

Замечание 2. Если ряд (1) сходится, то при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ ряд

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha x_k$ сходится и $S^{(4)} = \alpha S^{(1)}$, где $S^{(4)}$ — сумма ряда (4).

Замечание 3. Если ряды (1), (2) сходятся, то при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряд (5) $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + \beta y_k)$ сходится и $S^{(5)} = \alpha S^{(1)} + \beta S^{(2)}$, где $S^{(5)}$ —

сумма ряда (5); в частности, сходится ряд (6) $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)$ и $S^{(6)} = S^{(1)} - S^{(2)}$, где $S^{(6)}$ — сумма ряда (6).

Замечание 3 является следствием замечаний 1, 2.

Замечание 4. Если ряды (1), (2) сходятся абсолютно, то при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряд (5) сходится абсолютно, в частности, сходится абсолютно ряд (6) ([1, с.53]).

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Используя неравенство треугольника для нормы в алгебре $L(E)$ и кольцевое свойство этой алгебры, получаем методом математической индукции соответственно

Замечание 5. Для любых $F_1, F_2, \dots, F_m \in L(E)$ справедливо неравенство $\|F_1 + F_2 + \dots + F_m\| \leq \|F_1\| + \|F_2\| + \dots + \|F_m\|$.

Замечание 6. Для любых $F_1, F_2, \dots, F_m \in L(E)$ справедливо неравенство $\|F_1 F_2 \cdot \dots \cdot F_m\| \leq \|F_1\| \|F_2\| \cdot \dots \cdot \|F_m\|$.

Следствием замечания 6 является

Замечание 7. Для любого $F \in L(E)$ справедливо неравенство $\|F^m\| \leq \|F\|^m$.

Замечание 8. Известно ([2, с.129]), что из абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ с членами из банахова пространства следует его сходимость, при этом справедлива оценка

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|,$$

в частности, из абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ с членами из банаховой алгебры $L(E)$ следует его сходимость и

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} F_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|F_k\|$$

(этот частный случай рассмотрен в [1, с.126]).

Операторные тригонометрические функции $\sin X$, $\cos X$ определяются на $L(E)$ суммами абсолютно сходящихся рядов ([1, с.132], [3]): при каждом $X \in L(E)$

$$\sin X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k X^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k X^{2k}}{(2k)!}. \quad (1)$$

Определения (7) корректны в силу замечания 8. Заметим, что $\sin X$, $\cos X$ принадлежат семейству операторных функций

$$S(L(E), L(E)) = \left\{ f : L(E) \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq L(E) \right\}.$$

Пусть $X \in L(E)$, X фиксирован. Напомним ([3]), что $\sin X$, $\cos X$ — это конкретные операторы из алгебры $L(E)$, действующие в пространстве E соответственно по правилу: для любого $u \in E$

$$(\sin X)u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k+1}u}{(2k+1)!}, \quad (\cos X)u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k}u}{(2k)!}.$$

Покажем, что функция $Y = \sin X$ непрерывна на $L(E)$, т.е. что в любой фиксированной операторной точке $X \in L(E)$

$$\lim_{H \rightarrow O} \Delta Y(X) = O, \quad (2)$$

где $\Delta Y(X) = Y(X+H) - Y(X)$, H — приращение аргумента. Согласно определению предела, равенство (8) означает, что

$$\|\Delta Y(X)\| \xrightarrow{H \rightarrow O} 0. \quad (3)$$

Лемма 1. *Функция $Y = \sin X$ непрерывна в операторной точке $X = O$.*

Доказательство. Учитывая равенство $\sin O = O$, получаем $\Delta Y(O) = \sin H$. Используя неравенство $\|\sin F\| \leq \text{sh}\|F\|$ ([1, с.132]) при $F = H$, имеем (10) $\|\Delta Y(O)\| \leq \text{sh}\|H\|$. В силу непрерывности скалярной функции sht на \mathbb{R} , в частности, её непрерывности в точке $t = 0$: $\text{sht} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \text{sh}0 = 0$, правая часть неравенства (10) сходится к нулю при $H \rightarrow O$, т.е. при $\|H\| \rightarrow 0$. Следовательно, справедлив предельный переход (9) при $X = O$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Функция $Y = \sin X$ непрерывна на $L(E)$.*

Доказательство. В силу леммы 1 осталось показать непрерывность функции $Y = \sin X$ в любой фиксированной операторной точке $X \in L(E)$, $X \neq O$. Используя замечание 3, получаем

$$\Delta Y(X) = H + \sum_{k=1}^{\infty} V_k, \quad (4)$$

где

$$V_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[(X+H)^{2k+1} - X^{2k+1} \right]. \quad (5)$$

В силу замечаний 4, 8

$$\|\Delta Y(X)\| \leq \|H\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|V_k\|. \quad (6)$$

Используя равенство (12), преобразуем V_k . Приращение H берётся произвольным образом, поэтому операторы X и H в общем случае не коммутируют между собой. Следовательно, для раскрытия выражения $(X+H)^{2k+1}$ применять операторный бином Ньютона нельзя. Используя равенство $(X+H)^{2k+1} = (X+H)^{2k}(X+H)$, получаем

$$V_1 = -\frac{1}{3!} (XHX + HX^2 + H^2X + X^2H + XH^2 + HXH + H^3),$$

.....

$$V_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (X^{2k-1}HX + HX^{2k} + H^{2k}X + \dots + X^{2k}H + XH^{2k} + H^{2k-1}XH + H^{2k+1}), \quad (7)$$

.....

Сгруппируем слагаемые в круглых скобках в правой части соотношения (14) в отдельные блоки B_i , $i = \overline{1, 2k+1}$, где B_i — сумма всех слагаемых, каждое из которых содержит операторный множитель H ровно i раз:

$$B_1 = X^{2k-1}HX + HX^{2k} + \dots + X^{2k}H,$$

.....

$$B_i = X^{2k-i}H^iX + H^iX^{2k+1-i} + \dots + X^{2k+1-i}H^i, \quad (8)$$

.....

$$B_{2k+1} = H^{2k+1}.$$

Применяя формулу для числа перестановок с повторениями ([4, с.48]), приходим к выводу: число слагаемых в правой части соотношения (15) равно C_{2k+1}^i . В силу (14)

$$V_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{i=1}^{2k+1} B_i. \quad (9)$$

Следовательно, в силу формулы для суммы биномиальных коэффициентов ([4, с.72]) число слагаемых в круглых скобках в правой части соотношения (14) равно $2^{2k+1} - 1$. В силу (16) соотношения (11), (13) принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta Y(X) &= H + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{i=1}^{2k+1} B_i, \\ \|\Delta Y(X)\| &\leq \|H\| + \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{i=1}^{2k+1} B_i \right\|. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя однородность нормы в алгебре $L(E)$ и замечание 5, получаем

$$a_k = \left\| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{i=1}^{2k+1} B_i \right\| \leq \frac{1}{(2k+1)!} \sum_{i=1}^{2k+1} \|B_i\| = b_k. \quad (11)$$

Применяя замечания 5 – 7, имеем

$$\|B_i\| \leq \|X\|^{2k-i} \|H\|^i \|X\| + \|H\|^i \|X\|^{2k+1-i} + \dots + \|X\|^{2k+1-i} \|H\|^i,$$

т.е.

$$\|B_i\| \leq C_{2k+1}^i \|H\|^i \|X\|^{2k+1-i}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \|B_i\| \leq \|H\| \sum_{i=1}^{2k+1} C_{2k+1}^i \|H\|^{i-1} \|X\|^{2k+1-i}. \quad (12)$$

Нас интересует предельный переход при $H \rightarrow O$, т.е. при $\|H\| \rightarrow 0$, поэтому можно считать, что $\|H\| \leq \|X\|$ и вместо (19) записать оценку вида

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \|B_i\| \leq \|H\| \|X\|^{2k} \sum_{i=1}^{2k+1} C_{2k+1}^i. \quad (13)$$

Далее,

$$\sum_{i=1}^{2k+1} C_{2k+1}^i < \sum_{i=0}^{2k+1} C_{2k+1}^i = 2^{2k+1}. \quad (14)$$

В силу (20), (21)

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \|B_i\| < 2^{2k+1} \|H\| \|X\|^{2k},$$

следовательно,

$$b_k < \frac{2^{2k+1} \|H\| \|X\|^{2k}}{(2k+1)!} = c_k. \quad (15)$$

По признаку Даламбера ряд с

$$d_k = \frac{2^{2k+1} \|X\|^{2k}}{(2k+1)!}$$

сходится, ибо $D = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_{k+1}}{d_k} = 0 < 1$. Следовательно, ряд с $c_k = \|H\| d_k$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \|H\| \sum_{k=1}^{\infty} d_k. \quad (16)$$

По первому признаку сравнения ряд с b_k сходится и в силу (22), (23)

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq \|H\| \sum_{k=1}^{\infty} d_k. \quad (17)$$

В силу (18), (24)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \|H\| \sum_{k=1}^{\infty} d_k. \quad (18)$$

В силу (17), (25)

$$\|\Delta Y(X)\| \leq \|H\| + \|H\| \sum_{k=1}^{\infty} d_k. \quad (19)$$

Правая часть неравенства (26) сходится к нулю при $H \rightarrow O$, откуда следует предельный переход (9). Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Функция $Y = \cos X$ непрерывна на $L(E)$.*

Непрерывность операторных тригонометрических функций $\sin Bt$, $\cos Bt$, заданных на \mathbb{R} равенствами

$$\sin Bt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos Bt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} B^{2k}}{(2k)!},$$

доказана в [3] (здесь $B \in L(E)$, B фиксирован).

Заметим, что $\sin Bt$, $\cos Bt$ принадлежат семейству операторных функций

$$S(\mathbb{R}, L(E)) = \left\{ f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq L(E) \right\}.$$

Литература

1. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
2. Шварц Л. Анализ. Т. I / Л. Шварц. — М.: Мир, 1972. — 824 с.
3. Фомин В.И. Об операторных функциях операторного переменного / В.И. Фомин // Вестник российских университетов. Математика. — 2023. — Т.28, №141. — С. 68 – 89.
4. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. — 400 с.

ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasilyfomin@bk.ru

Пусть Υ — множество всех иррациональных чисел, $\Upsilon_{(0,1)} = \{\alpha \in \Upsilon | \alpha \in (0, 1)\}$, $\mathbb{Q}_{(0,1)} = \{a \in \mathbb{Q} | a \in (0, 1)\} = \{p/q | p, q \in \mathbb{N}; q \geq 2, p < q, (p, q) = 1\}$. В силу полноты множества \mathbb{R} ([1, с.37]) имеем $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \Upsilon$, $(0, 1) = \mathbb{Q}_{(0,1)} \cup \Upsilon_{(0,1)}$, при этом \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}_{(0,1)}$ — счётные множества ([2, с.86], [3, с.92]); Υ , $\Upsilon_{(0,1)}$ — множества мощности континуума ([1, с.50]), т.е.

$$\text{card}\mathbb{Q} = \text{card}\mathbb{Q}_{(0,1)} < \text{card}\Upsilon = \text{card}\Upsilon_{(0,1)},$$

следовательно, среди элементов множеств \mathbb{R} , $(0, 1)$ преобладают иррациональные числа. В связи с этим целесообразно расширить круг конкретных иррациональных чисел. Напомним классические примеры иррациональных чисел: $\sqrt{2}$ ([2, с.58]); e , π ([4, с.122, 124]).

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. В [5, 6] показано, что на кривой $L_n : \nu = \sqrt[n]{1 - \mu^n}$, $\mu \in (0, 1)$, нет рациональных точек, следовательно, для любого $p/q \in \mathbb{Q}_{(0,1)}$ справедливо включение $\alpha_{n,p/q} = \sqrt[n]{1 - (p/q)^n} \in \Upsilon_{(0,1)}$. В результате получаем счётное множество иррациональных чисел $M_n = \left\{ \alpha_{n,p/q} = \sqrt[n]{1 - (p/q)^n} \mid p/q \in \mathbb{Q}_{(0,1)} \right\}$. Элементы множества M_n можно записать в виде $\alpha_{n,p/q} = \sqrt[n]{q^n - p^n}/q$, следовательно, $\sqrt[n]{q^n - p^n} \in \Upsilon$. В итоге получаем счётное множество иррациональных чисел $K_n = \{ \beta_{n,p,q} = \sqrt[n]{q^n - p^n} \mid p, q \in \mathbb{N}; q \geq 2, p < q, (p, q) = 1 \}$. Множество иррациональных чисел $K = \bigcup_{n=3}^{\infty} K_n$ тоже счётно как объединение счётной системы счётных множеств ([2, с.85]). В целях наглядности элементы множеств K_n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) можно записывать в виде таблицы. Например, такая таблица для элементов множества K_3 имеет вид

$q \setminus p$	1	2	3	4	5	6	7	...
2	$\sqrt[3]{7}$	—	—	—	—	—	—	—
3	$\sqrt[3]{26}$	$\sqrt[3]{19}$	—	—	—	—	—	—
4	$\sqrt[3]{63}$	—	$\sqrt[3]{37}$	—	—	—	—	—
5	$\sqrt[3]{124}$	$\sqrt[3]{117}$	$\sqrt[3]{98}$	$\sqrt[3]{61}$	—	—	—	—
6	$\sqrt[3]{215}$	—	—	—	$\sqrt[3]{91}$	—	—	—
7	$\sqrt[3]{342}$	$\sqrt[3]{335}$	$\sqrt[3]{316}$	$\sqrt[3]{279}$	$\sqrt[3]{218}$	$\sqrt[3]{127}$	—	—
...

Замечание 1. Для любых $\alpha \in \Upsilon$, $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, в частности, для любого $a \in \mathbb{N}$, справедливо включение $a\alpha \in \Upsilon$.

В силу замечания 1 получаем при любом $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, счётное множество иррациональных чисел

$$K_{n,m} = \{ m\beta_{n,p,q} \mid \beta_{n,p,q} \in K_n \}$$

и, тем самым, счётное множество иррациональных чисел

$$\hat{K} = K \cup \left(\bigcup_{m=2}^{\infty} \bigcup_{n=3}^{\infty} K_{n,m} \right).$$

Данный доклад является дополнением к работе [7].

Литература

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. — М.: Наука, 1977. — 368 с.

2. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I / В.А. Зорич. — М.: МЦНМО, 2007. — 664 с.
3. Ильин В.А. Основы математического анализа. Часть I / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 648 с.
4. Шидловский А.Б. Диофантовы приближения и трансцендентные числа / А.Б. Шидловский. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 272 с.
5. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat’s last Theorem // Annals of Mathematics, 1995. V.142. P. 443 – 551.
6. Wiles A. Ring theoretic of certain Hecke algebras // Annals of Mathematics, 1995. V.142. P. 553 – 572.
7. Фомин В.И. Об одном множестве иррациональных чисел / В.И. Фомин // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. — 2015. — Т.20, вып. 2. — С. 299 – 301.

О ДИЗЪЮНКТНЫХ КОНТИНУАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВАХ КОМПАКТОВ В \mathbb{R}^N

О.Д. Фролкина (Москва, МГУ)

olga-frolkina@yandex.ru

Согласно классической теореме Лефшеца–Менгера–Небелинга–Понтрягина–Толстовой, каждый k -мерный компакт обладает топологическим вложением в \mathbb{R}^{2k+1} . В случае k -мерного полиэдра X , в \mathbb{R}^{2k+1} можно вложить произведение $X \times I$ [1, Thm. 1.5]; однако это утверждение “не видит”, как будут вложены отдельные экземпляры $X \times \{t\}$, $t \in I$. См. также [2, Cor. 4.7].

Определение. *Подмножества $X, X' \subset \mathbb{R}^N$ вложены эквивалентно (или объемлемо гомеоморфны), если существует такой гомеоморфизм $h : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$, что $h(X) = X'$. Пишем $h : (\mathbb{R}^N, X) \cong (\mathbb{R}^N, X')$.*

Задача классификации вложений — тяжелая. Если X — канторово множество, отрезок или окружность, то все вложения $X \rightarrow \mathbb{R}^2$ эквивалентны друг другу (теоремы Антуана и Жордана–Шенфлиса). Для вложений S^1 в \mathbb{R}^3 это обширная теория узлов (которая, к тому же, ограничивается ручными узлами, т.е. эквивалентными полидральным). Даже в случае канторова множества X в \mathbb{R}^3 имеются лишь частичные классификации некоторых очень ограниченных семейств.

В теории вложений важную роль играет k -мерный компакт Менгера $M_N^k \subset \mathbb{R}^N$, являющийся обобщением канторова множества и

ковра Серпинского. Всякий k -мерный компакт, вложимый в \mathbb{R}^N , может быть вложен в M_N^k (гипотеза Менгера, доказана М.А. Штанько [3, 4], для $N = 2k + 1$ — Лефшецем в 1931). Однако, если X уже вложен в \mathbb{R}^N , то нельзя гарантировать, что новое вложение $X \hookrightarrow M_N^k \subset \mathbb{R}^N$ будет эквивалентно первоначальному. Существование эквивалентного вложения, “загоняющего” X в M_N^k , равносильно неравенству $\text{dem } X \leq k$. (Здесь dem — “размерность вложения” Штанько [3, 4]. По сути, равенство $\dim X = \text{dem } X = k$ означает, что X ведет себя подобно k -мерному полиэдру.)

В 1989 г. Бэйкер и Лэйдекер поставили вопрос [5, с. 209]: Пусть $X \subset \mathbb{R}^{2k+1}$ — k -мерный континуум; верно ли, что в \mathbb{R}^{2k+1} можно построить семейство попарно дизъюнктивных компактов $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$, где $|A| = c$ и $(\mathbb{R}^{2k+1}, X_\alpha) \cong (\mathbb{R}^{2k+1}, X)$ для каждого $\alpha \in A$?

Бэйкер и Лэйдекер показали, что в случае $\text{dem } X \leq k$ ответ положителен [5]. В докладе будет показано, что при $\text{dem } X > k$ имеются примеры обоих сортов. При построении “негативных” примеров используется компакт Франкла–Понтрягина [6] (ср. [7] и [8]).

Кроме того, в докладе будет получено простое, но интересное следствие результата Бэйкера–Лэйдекера. Именно:

Предложение. В \mathbb{R}^3 существует такое семейство $\{X_\alpha\}$ попарно непересекающихся компактов, что для произвольного вложения $h : Z \rightarrow \mathbb{R}^3$, где Z — окружность, отрезок или канторово множество, имеем $\{\alpha \mid (\mathbb{R}^3, X_\alpha) \cong (\mathbb{R}^3, h(Z))\} = c$.

Это усиливает результаты Шера (1969) и Аподака (1981). См. [9].

Литература

1. Repovš D. On embeddability of $X \times I$ into Euclidean space / D. Repovš, A.B. Skopenkov, E.V. Ščepin // Houston J. Math. — 1995. — V. 21, № 1. — P. 199–204.
2. Melikhov S.A. The telescope approach to embeddability of compacta / S.A. Melikhov, E.V. Shchepin // arXiv: math.GT/0612085. — 2006. — 26 с.
3. Штанько М.А. Вложение компактов в евклидово пространство / М.А. Штанько // Матем. сб. — 1970. — Т. 83 (125), № 2 (10). — С. 234–255.
4. Штанько М.А. Решение задачи Менгера в классе компактов / М.А. Штанько // ДАН СССР. — 1971. — Т. 201, № 6. — С. 1299–1302.
5. Baker B.J. Embedding uncountably many mutually exclusive continua into Euclidean space / B.J. Baker, M. Laidacker // Can. Math. Bull. — 1989. — V. 32, № 2. — P. 207–214.

6. Frankl F. Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie / F. Frankl, L. Pontrjagin // Math. Ann. — 1930. — Bd. 102. — S. 785–789.

7. Bothe H.G. Ein eindimensionales Kompaktum im E^3 , das sich nicht lagetreu in die Mengersche Universalkurve einbetten läßt / H.G. Bothe // Fundam. Math. — 1964. — V. 54. — P. 251–258.

8. McMillan D.R. jr. Tangled embeddings of one-dimensional continua / D.R. McMillan jr., H. Row // Proc. Am. Math. Soc. — 1969. — V. 22. — P. 378–385.

9. Frolkina O. On a question of B.J. Baker and M. Laidacker concerning disjoint compacta in \mathbb{R}^N / O. Frolkina // Topology Appl. — 2023. — V. 329. — Article ID 108376, 16 p.

**ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ
РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ
И ДРОБНОЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ**

Е.В. Фролова, И.В. Барышева, Н.И. Трусова

(Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)

barysheva_iv@mail.ru

С интегро-дифференциальными уравнениями (ИДУ) с частными интегралами связаны уравнения Колмогорова-Феллера, моделирующие различные прикладные задачи. В работе изучается ИДУ

$$\left(D_{a_k+, t_{\alpha_k}}^\beta u\right)(x) = (Ku)(x) + f(x) \quad (1)$$

с левосторонней дробной частной производной в смысле Римана-Лиувилля. Дифференциальные уравнения с производными и интегралами дробного порядка изучались в (1), (2), и, дополнительно, с частными интегралами для функций трёх переменных в (3).

Пусть $D = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}$ — конечный параллелепипед в \mathbb{R}_n ; $\alpha, \bar{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \dots, n)$; m — размерность параллелепипеда D_{x_α} ($1 \leq m \leq n$) и частно-интегральный оператор определяется равенством

$$(Ku)(x) = \sum_{m=1}^n \sum_{\alpha} \left(K_\alpha^{(m)} u\right)(x), \quad (2)$$

где

$$\left(K_{\alpha}^{(m)}u\right)(x) = \int_{a_m}^{b_m} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} k_{\alpha}(x; t_{\alpha}) u(t_{\alpha}; x_{\bar{\alpha}}) dt_{\alpha}, \quad (3)$$

α — мультииндекс, содержащий номера переменных интегрирования, $\bar{\alpha}$ — номера переменных, свободных от интегрирования, причем для каждого $K_{\alpha}^{(m)}$ мультииндекс α фиксирован.

Через $C(D)$ обозначим пространство непрерывных функций с \sup -нормой, а функцию $k_{\alpha}(x; t_{\alpha})$ будем называть L_1 -непрерывной и L_1 -ограниченной, если она является непрерывной при каждом x функцией со значениями в пространстве L_1 . Соответствующее пространство функций с нормой $\|k_{\alpha}\|_{CL_1} = \sup_{x \in \bar{D}} \int_{D_{t_{\alpha}}} |k_{\alpha}(x; t_{\alpha})| dt_{\alpha}$ обозначим $CL_1 = C(D; L_1(D_{t_{\alpha}}))$.

Через $C_{t_{\alpha_k}}(D)$ обозначим пространство непрерывных на D вместе с частной производной по t_{α_k} функцией $u(x)$.

Левосторонняя частная производная Римана-Лиувилля определяется равенством

$$\left(D_{a_k+, t_{\alpha_k}}^{\beta} u\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha_k}} \int_{a_k}^{t_{\alpha_k}} \frac{u(x)}{(t-t_{\alpha_k})^{\beta}} dt_{\alpha_k},$$

($t_{\alpha_k} > a_k$), где $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} y^{z-1} e^{-y} dy$ — гамма-функция.

Определим левосторонний дробный интеграл по t_{α_k} Римана-Лиувилля порядка β при $0 < \beta < 1$ и $u \in CL_1$ следующим равенством

$$\left(I_{a_k+, t_{\alpha_k}}^{\beta} u\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{\partial}{\partial t_{\alpha_k}} \int_{a_k}^{t_{\alpha_k}} \frac{u(x)}{(t-t_{\alpha_k})^{1-\beta}} dt_{\alpha_k},$$

($t_{\alpha_k} > a_k$). Будем рассматривать задачу типа Коши для ИДУ (1) с дополнительным условием

$$\begin{aligned} &\left(I_{a_k+, t_{\alpha_k}}^{1-\beta} u\right)(t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_k}, \dots, t_{\alpha_m}; x_{\bar{\alpha}}) = \\ &= \varphi(t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_{k-1}}, t_{\alpha_{k+1}}, \dots, t_{\alpha_m}; x_{\bar{\alpha}}). \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема. Пусть $k_{\alpha}(x; t_{\alpha})$ — L_1 -непрерывная и L_1 -ограниченная функция, $0 < \beta < 1$. Тогда задача Коши для ИДУ

$$\left(D_{a_k+, t_{\alpha_k}}^{\beta} u\right)(x) = \left(K_{\alpha_k}^{(m)}u\right)(x) + f(x)$$

с условием (4) имеет единственное решение в $C_{t_{\alpha_k}}(D)$.

Литература

1. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. Сабитов К.Б. Дополнительные главы к курсу дифференциальных уравнений: Учеб. пособие для вузов / К.Б. Сабитов, С.Н. Сидоров. — М.: Наука, 2025. — 128 с.
3. Барышева И.В. Об интегро-дифференциальных уравнениях с частными интегралами и с дробной частной производной / И.В. Барышева, А.С. Калитвин // Вестник Липецкого государственного педагогического университета. Серия МИФЕ: математика, информационные технологии, физика, естествознание. — 2015. — № 4(19). — С. 3–6.

КОРРЕКТНОСТЬ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ БИНГАМА¹

Е.Н. Харитонова, А.В. Звягин (Воронеж, ВГУ)

liza.kharitonova.2025@mail.ru, zvyagin.a@mail.ru

В периодической области $\Omega = \prod_{i=1}^n (0, l_i) \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ рассматривается задача для модели движения жидкости Бингама (см. [1]–[2]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p &= f, \\ \sigma &= \begin{cases} 2\mu(\theta)\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|}, & \text{for } |\mathcal{E}(v)| \neq 0; \\ |\sigma| \leq \tau^*, & \text{for } |\mathcal{E}(v)| = 0; \end{cases} \\ \operatorname{div} v &= 0, \\ v(x, 0) &= a(x). \end{aligned}$$

Здесь $v(x, t) = (v_1, \dots, v_n)$ — вектор-функция скорости движения частицы среды, $p = p(x, t)$ — функция давления, $f = f(x, t)$ — функция плотности внешних сил, $\sigma(x, t)$ — девиатор тензора напряжений, $\mu > 0$ — коэффициент вязкости, $\tau^* > 0$ — предел текучести, $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij}(v))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор скоростей деформации.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (проект № 25-11-00056).
© Харитонова Е.Н., Звягин А.В., 2026

Определение 1. Пусть задано начальное условие $a \in V^1$. Слабым решением задачи для модели движения жидкости Бингама называется пара функций (v, σ) , $v \in W = \{v \in L_2(0, T; V), v' \in L_{4/3}(0, T; V^*)\}$, $\sigma \in L_2(\Omega \times (0, T))^{n^2}$, удовлетворяющая для любой пробной функции $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0, T)$ равенству

$$\langle v'(t), \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i(t) v_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \sigma(x, t) : \varepsilon(\varphi) dx = \langle f(t), \varphi \rangle,$$

соотношению Бингама и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Основным результатом работы является следующая теорема, полученная аналогично работам [3]–[5]:

Теорема 1. Пусть $a \in V^1$ и $f \in L_2(0, T; V^*)$. Тогда пара функций (v, σ) является слабым решением задачи для модели движения жидкости Бингама.

Литература

1. Звягин В.Г. Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным / В.Г. Звягин, А.В. Звягин, М.В. Турбин // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2018. — Т. 477. — С. 54–86.
2. Звягин А.В. Исследование разрешимости альфа-модели Бингама / А.В. Звягин, Н.В. Толстой // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2025. — Т. 71, Н. 4. — С. 604–625.
3. Zvyagin A.V. Solvability of the stationary mathematical model of one non-Newtonian fluid motion with the objective derivative / A.V. Zvyagin // Fixed point theory. — 2014. — V. 15, I. 2. — P. 623–634.
4. Звягин А.В. Слабая разрешимость термовязкоупругой модели Кельвина-Фойгта / А.В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. — 2018. — Н. 3. — С. 91–95.
5. Zvyagin A. Solvability of the non-linearly viscous polymer solutions motion model / A. Zvyagin // Polymers. — 2022. — V. 14, N. 6. — P. 1264.

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ЛИНЕЙНЫХ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Л. Хацкевич, Н.А. Каплиева, Н.Н. Кузнецова

(Воронеж, ВУНЦ ВВС ВВА, ВГУ)

vlkhat@mail.ru, kaplieva@amm.vsu.ru, slava.n.1@ya.ru

Пусть \mathbb{R} — множество вещественных чисел. Рассмотрим множество $\mathbb{R}_{\mathcal{T}}$ нечетких треугольных чисел [1]. А именно нечетких чисел вида $\tilde{z} = (z^-, z^1, z^+)$, определяемых тройкой вещественных чисел $z^- < z^1 < z^+$, порождающих функцию принадлежности вида

$$\mu_{\tilde{z}}(x) = \begin{cases} \frac{x - z^-}{z^1 - z^-}, & \text{если } z^- \leq x \leq z^1, \\ \frac{z^+ - x}{z^+ - z^1}, & \text{если } z^1 \leq x \leq z^+, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В формуле (1) $z^1 = M\tilde{z}$ — модальное (наиболее возможное) значение \tilde{z} .

Отметим, что смысл данного нечеткого треугольного числа — около « z^1 ». Для нечетких треугольных чисел $\tilde{z}, \tilde{w} \in \mathbb{R}_{\mathcal{T}}$, имеющих вид $\tilde{z} = (z^-, z^1, z^+)$ и $\tilde{w} = (w^-, w^1, w^+)$, соотношение $\tilde{z} = \tilde{w}$ эквивалентно $z^- = w^-$, $z^1 = w^1$, $z^+ = w^+$. Правила сложения и умножения на число вводятся по следующим формулам [1] $\tilde{z} + \tilde{w} = (z^- + w^-, z^1 + w^1, z^+ + w^+)$. Умножение на положительное число $c > 0$ дает $c\tilde{z} = (cz^-, cz^1, cz^+)$, а умножение на отрицательное число $(-c)$ дает $(-c)\tilde{z} = (-cz^+, -cz^1, -cz^-)$.

Вещественное число $r \in \mathbb{R}$ трактуется как треугольное, у которого $r^{\pm} = r^1 = r$.

Ниже используются понятия среднего значения и полуразмаха нечеткого треугольного числа $\tilde{z} = (z^-, z^1, z^+)$. А именно средним значением \tilde{z} называют вещественное число $m(\tilde{z}) = (y^+ + y^-)/2$, а полуразмахом число $r(\tilde{z}) = (y^+ - y^-)/2$.

Пусть интервал $(0, T) \subset \mathbb{R}$ и $\tilde{y} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{T}}$ — нечеткозначная функция, имеющая вид $\tilde{y}(t) = (y^-(t), y^1(t), y^+(t))$ при $\forall t \in [0, T]$.

В соответствии с определением и свойствами обобщенных производных (см., напр., [2, 3]) справедлива

Лемма 1. *Если нечеткозначная треугольная функция (1)-обобщенно дифференцируема $\tilde{y}(t) = (y^-(t), y^1(t), y^+(t))$, то ее обобщенная (1)-производная имеет вид $(D_1^1 \tilde{y})(t) = ((y^-)'(t), (y^1)'(t), (y^+)'(t))$. Если $\tilde{y}(t)$ — (2)-обобщенно дифференцируема в точке $t \in (0, T)$, то ее обобщенная (2)-производная имеет вид $(D_2^1 \tilde{y})(t) = ((y^+)'(t), (y^1)'(t), (y^-)'(t))$.*

Заметим, что в зависимости от типов производной меняются только крайние значения соответствующих троек.

Лемма 2. *Пусть $\tilde{y}(t)$ — (1)-обобщенно дифференцируема и производная $(D_1^1 \tilde{y})(t)$ — (1)-обобщенно дифференцируема. Тогда ее*

обобщенная вторая производная имеет вид $(D_{1,1}^2 \tilde{y})(t) = ((y^-)''(t), (y^+)''(t), (y^+)''(t))$.

Пусть $\tilde{y}(t)$ (1)-дифференцируема, а производная $(D_1^1 \tilde{y})(t) = (2)$ -дифференцируема. Тогда вторая производная $(D_{1,2}^2 \tilde{y})(t) = ((y^+)''(t), (y^+)''(t), (y^-)''(t))$.

Пусть $\tilde{y}(t)$ (2)-дифференцируема, а производная $(D_2^1 \tilde{y})(t) = (1)$ -дифференцируема. Тогда $(D_{2,1}^2 \tilde{y})(t) = ((y^+)''(t), (y^+)''(t), (y^-)''(t))$.

Пусть $\tilde{y}(t)$ (2)-дифференцируема, а $(D_2^1 \tilde{y})(t)$ также (2)-дифференцируема. Тогда вторая производная $(D_{2,2}^2 \tilde{y})(t) = ((y^-)''(t), (y^+)''(t), (y^+)''(t))$.

Рассмотрим линейное нечеткое дифференциальное уравнение (НДУ) второго порядка вида

$$\tilde{y}''(t) + p(t)y'(t) + q(t)\tilde{y}(t) = \tilde{f}(t) \quad (2)$$

в предположениях $p(t), q(t) \geq 0$ ($\forall t \in (0, T)$) — непрерывные функции, а $\tilde{y}(t) = (f^-(t), f^1(t), f^+(t))$ — нечеткозначная треугольная функция с непрерывными компонентами.

Уравнение (2) будем рассматривать при начальных условиях

$$\tilde{y}(0) = (y^-(0), y^1(0), y^+(0)), \quad (3)$$

$$(D_1^1 \tilde{y})(0) = ((y^-)'(0), (y^1)'(0), (y^+)'(0)) \quad (4)$$

либо вместо (4) при условиях

$$(D_2^1 \tilde{y})(0) = ((y^+)'(0), (y^1)'(0), (y^-)'(0)) \quad (5)$$

в зависимости от типа дифференцируемости первой производной.

1) Пусть решение НДУ (1) $\tilde{y}(t)$ обобщенно (1)-дифференцируемо, и его производная $D_1^1 \tilde{y}(t)$ также обобщенно (1)-дифференцируема. Тогда уравнение (2) эквивалентно уравнению $(D_{1,1}^2 \tilde{y})(t) + p(t)(D_1^1 \tilde{y})(t) + q(t)\tilde{y}(t) = \tilde{f}(t)$. Это уравнение в соответствии с леммами 1, 2 преобразуется к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{cases} (y^-)''(t) + p(t)(y^-)'(t) + q(t)y^-(t) = f^-(t), \\ (y^1)''(t) + p(t)(y^1)'(t) + q(t)y^1(t) = f^1(t), \\ (y^+)''(t) + p(t)(y^+)'(t) + q(t)y^+(t) = f^+(t) \end{cases} \quad (6)$$

при начальных условиях (3), (4).

2) Пусть решение $\tilde{y}(t)$ обобщенно (1)-дифференцируемо, а производная $(D_1^1 \tilde{y})(t)$ обобщенно (2)-дифференцируема. Тогда уравнение

(2) преобразуется к виду $(D_{1,2}^2 \tilde{y})(t) + p(t)(D_1^1 \tilde{y})(t) + q(t)\tilde{y}(t) = \tilde{f}(t)$. Следовательно, в соответствии с леммами 1, 2 получим систему линейных ОДУ

$$\begin{cases} (y^+)''(t) + p(t)(y^-)'(t) + q(t)y^-(t) = f^-(t), \\ (y^1)''(t) + p(t)(y^1)'(t) + q(t)y^1(t) = f^1(t), \\ (y^-)''(t) + p(t)(y^+)'(t) + q(t)y^+(t) = f^+(t) \end{cases} \quad (7)$$

при начальных условиях (3), (4).

3) Пусть решение $\tilde{y}(t)$ обобщенно (2)-дифференцируемо, а $(D_2^1 \tilde{y})(t)$ — обобщенно (1)-дифференцируемо. Тогда уравнение (1) превращается в следующее $(D_{2,1}^2 \tilde{y})(t) + p(t)(D_2^1 \tilde{y})(t) + q(t)\tilde{y}(t) = \tilde{f}(t)$. Следовательно, согласно леммам 1, 2 в этом случае имеем систему линейных ОДУ

$$\begin{cases} (y^+)''(t) + p(t)(y^+)'(t) + q(t)y^-(t) = f^-(t), \\ (y^1)''(t) + p(t)(y^1)'(t) + q(t)y^1(t) = f^1(t), \\ (y^-)''(t) + p(t)(y^-)'(t) + q(t)y^+(t) = f^+(t) \end{cases} \quad (8)$$

при начальных условиях (3), (5).

4) Пусть решение $\tilde{y}(t)$ обобщенно (2)-дифференцируемо, а $(D_1^2 \tilde{y})(t)$ — обобщенно (2)-дифференцируемо. Тогда уравнение (2) имеет вид $(D_{2,2}^2 \tilde{y})(t) + p(t)(D_2^1 \tilde{y})(t) + q(t)\tilde{y}(t) = \tilde{f}(t)$. Тогда в соответствии с леммами 1, 2 имеем систему линейных ОДУ

$$\begin{cases} (y^+)''(t) + p(t)(y^-)'(t) + q(t)y^+(t) = f^+(t), \\ (y^1)''(t) + p(t)(y^1)'(t) + q(t)y^1(t) = f^1(t), \\ (y^-)''(t) + p(t)(y^+)'(t) + q(t)y^-(t) = f^-(t) \end{cases} \quad (9)$$

при начальных условиях (3), (5).

Как известно, каждая из систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (6)–(9) при соответствующих начальных условиях имеет единственное решение на заданном интервале. Вопрос о допустимости этих решений, а именно соответствии решений указанных ОДУ, предположениям о дифференцируемости нечеткозначного решения, при которых они получены. Этому вопросу посвящен ряд работ [4–6 и др.]. В частности, в работе [4] приведены примеры, показывающие, что решения всех систем могут быть недопустимыми или какие-то системы имеют допустимые решения, а какие-то нет. Поэтому важным является вопрос об инвариантных числовых характеристиках, которых характеризуют все системы ОДУ, отвечающие данному линейному НДУ.

В работах [7, 8] обсуждается понятие ультраслабого решения систем ОДУ типа (6)–(9). А именно, решение систем типа (6)–(9) называют ультраслабым, если тройка $y^-(t)$, $y^1(t)$, $y^+(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ порождает нечеткое треугольное число, т. е. $y^-(t) < y^1(t) < y^+(t)$ ($\forall t \in [0, T]$).

Теорема 1. *Независимо от типа обобщенной дифференцируемости решения модальное значение $y^1(t)$ ультраслабое решение каждой из систем (6)–(9), соответствующих решению $\tilde{y}(t)$ НДУ (2) с начальным условием (3), (4) либо (3), (5), удовлетворяет одному и тому же ОДУ $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f^1(t)$ с начальными условиями $y(0) = y^1(0)$, $y'(0) = (y^1)'(0)$.*

Теорема 2. *Независимо от типа обобщенной дифференцируемости решения среднее $m_{\tilde{y}}(t) = (y^+(t) + y^-(t))/2$ ультраслабое решение каждой из систем (6)–(9), соответствующих решению $\tilde{y}(t)$ с начальным условием (3), (4) либо (3), (5), удовлетворяет одному и тому же ОДУ $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = m_{\tilde{f}}(t) = (f^-(t) + f^+(t))/2$ с начальными условиями $y(0) = (y^-(0) + y^+(0))/2$, $y'(0) = ((y^-)'(0) + (y^+)'(0))/2$.*

Этот факт можно трактовать как то, что дефазсификация решений каждой из систем ОДУ (6)–(9) приводит к одному результату, что естественно, поскольку системы (6)–(9) получены из одного и того же НДУ (2) при соответствующих начальных условиях.

Однако заметим, что полуразмахи решений систем (6)–(9), вообще говоря, различны. Кроме того отметим, что в системах (6), (9) переменные разделены.

В заключение отметим, что список инвариантных характеристик не исчерпывается вышеописанными. Можно показать, что и другие средние, в частности, медиана и центр тяжести нечеткого числа также являются инвариантными характеристиками.

Литература

1. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление / А. Пегат. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 801 с.
2. Varnab's Bede Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations / Bede Varnab's, G.Gal. Sorin // Fuzzy Sets and Systems. — 2005. — V. 151, № 3. — P. 581–599.
3. Chalco-Cano Y. On new solutions of fuzzy differential equations / Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores // Chaos, Solitons & Fractals. — 2008. — V. 38, № 1. — P. 112–119.

5. Khastan A. New Results on Multiple Solutions for Nth-Order Fuzzy Differential Equations under Generalized Differentiability / A. Khastan, F. Bahrami, K. Ivaz // Boundary Value Problems. — 2009. — V. 2009, № 7. — P. 1–13.

6. Salahshour S. Nth-order Fuzzy Differential Equations Under Generalized Differentiability / S. Salahshour // Journal of Fuzzy Set Valued Analysis. — 2011. — V. 2011. — P. 1–14.

7. Gasilov N. Solution of linear differential equations with fuzzy boundary values / N. Gasilov, S.E. Amrahov, A.G. Fatullayev // Fuzzy Sets and Systems. — 2014. — V. 257. — P. 169–183.

8. Хацкевич В.Л. Метод функций Грина в задаче о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой / В.Л. Хацкевич // Автоматика и телемеханика. — 2025. — № 10. — С. 42–65.

9. Хацкевич В.Л. Применение средних характеристик нечетких чисел в задаче о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой / В.Л. Хацкевич, Н.А. Каплиева // Искусственный интеллект и принятие решений. — 2026. — № 1. — С. 34–51.

СОЛНЕЧНОСТЬ И ОГРАНИЧЕННАЯ Δ-КОМПАКТНОСТЬ

И.Г. Царьков (Москва, МГУ, механико-математический
факультет, Центр фундаментальной и прикладной математики)
tsar@mech.math.msu.su

Нам понадобятся следующие обозначения. Для произвольного множества M в некотором линейном нормированном пространстве X через $\varrho(y, M)$ обозначим расстояние до множества M , т.е. величину

$$\inf_{z \in M} \|z - y\| \quad (y \in X).$$

Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество

$$\{y \in M \mid \|y - x\| = \varrho(x, M)\}.$$

Отображение P_M называют метрической проекцией на множество M . Через

$$B(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\} \text{ и } S(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x\| = r\}$$

обозначим соответственно шар и сферу с центром x радиуса $r \geq 0$. В случае $x = 0$ и $r = 1$ будем вместо указанных обозначений писать единичные шар и сферу: B и S соответственно. Через $\overset{\circ}{B}(x, r)$ обозначим открытый шар в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ с центром x радиуса r , т.е. множество $\{y \in X \mid \|y - x\| < r\}$.

Определение 1. Будем говорить, что направленность (последовательность) $\{x_\delta\}$ Δ -сходится в пространстве $C(Q)$ к некоторой функции $x \in C(Q)$, если она сходится поточечно на плотном подмножестве компакта Q , т.е. $x_\delta \xrightarrow{\Delta} x$, если найдется плотное подмножество $Q_0 \subset Q$, на котором $x_\delta(t) \rightarrow x(t)$ для любого $t \in Q_0$. Множество называется Δ -компактным в $C(Q)$, если любая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность к точке этого множества. Множество $M \in C(Q)$ называется ограниченно Δ -компактным, если пересечение с любым шаром $B(x, r)$ Δ -компактно.

Определение 2. Пусть $\emptyset \neq M \subset X$. Точка $x \in X \setminus M$ называется точкой солнечности, если существует точка $y \in P_M x \neq \emptyset$ (называемая точкой светимости) такая, что $y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geq 0$ (это геометрически означает, что из точки y исходит луч (солнечный луч), проходящий через x , для каждой точки которого y является ближайшей из M).

Точка $x \in X \setminus M$ называется точкой строгой солнечности, если $P_M x \neq \emptyset$ и каждая точка $y \in P_M x$ является точкой светимости. Если все точки из $K \subset X \setminus M$ являются точками солнечности (строгой солнечности), то множество M называют солнцем (строгим солнцем) относительно множества K . В случае, когда $K = X \setminus M$, говорят, что M – солнце (строгое солнце).

Определение 3. Путь $p : [0, 1] \rightarrow X$ (непрерывное отображение) в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ называется монотонным, если для любого функционала $x^* \in \text{ext } S^*$ функция $x^*(p(t))$ является монотонной. Геометрически это означает, что поверхности уровня этого функционала (т.е. соответствующие гиперплоскости) этот путь пересекают один раз или по следу некоторого его подпути. Таким образом, прообразы пересечения с соответствующими гиперплоскостями являются отрезками (возможно вырожденными). Множество M называется монотонно линейно связным, если любые две точки этого множества можно соединить монотонным путем, след которого лежит в M .

Напомним определение *сегмента* $[[x, y]]$ и промежутка в $C(Q)$:

$$[[x, y]] := \{z \mid z(t) \in [x(t), y(t)], t \in Q\}.$$

Определение 4. Подмножество $M \subset C(Q)$ называется (сильно) связным по Менгеру, если $[[x, y]] \cap M \neq \{x, y\}$ для любых различных точек $x, y \in M$. Подмножество $M \subset X$ назовем слабо связным по Менгеру (слабо линейно связным), если для любого конечного набора $\alpha = (x_1^*, \dots, x_n^*) \subset \text{ext } S^*$ множество $(x_1^*, \dots, x_n^*)(M)$ сильно связано по Менгеру (линейно связным) в пространстве $X_\alpha := (x_1^*, \dots, x_n^*)(X)$.

Теорема 1. Пусть M – ограниченно Δ -компактное множество в $C(Q)$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1). M – солнце в $C(Q)$;
- 2). M – слабо монотонно связано по Менгеру;
- 3). M – слабо монотонно линейно связано.

Можно показать, что для ограниченно Δ -компактных солнц $M \subset C(Q)$ метрическая проекция на них является либо несчетным, либо одноточечным множеством для всех функций из $C(Q)$. Иначе это множество не будет слабо монотонно линейно связным. Для примера отметим, что множество обобщенных экспонент

$$E_n := \left\{ \sum_{1 \leq j \leq n} p_j(x) e^{\lambda_j x} \mid x, \lambda_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^n (1 + \deg p_j(x)) \leq n \right\}$$

является ограниченно Δ -компактным и для всех $n \geq 2$ не является чебышевским множеством в $C[a, b]$ ($a < b$). Метрическая проекция на E_n не пуста и состоит из конечного числа точек для каждой функции из $C[a, b]$. Следовательно, E_n не является солнцем в $C[a, b]$.

Теорема 2. Пусть M – ограниченно слабо компактное множество в $C(Q)$, где Q – метрический компакт. Тогда следующие условия равносильны:

- 1). M – солнце в $C(Q)$;
- 2). M слабо связано по Менгеру;
- 3). M слабо монотонно линейно связано;
- 4). M связано по Менгеру;
- 5). M монотонно линейно связано.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

ДЛЯ РАЗНОПОРЯДКОВОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ГРАФЕ-КРЕСТЕ¹

Г.С. Цахоев (Владикавказ, СОГУ им. К.Л. Хетагурова)
geor107@yandex.ru

Рассматривается плоский граф-крест Γ , состоящий из четырёх рёбер $\gamma_i = (a, a_i)$, $i = \overline{1, 4}$, с общей концевой точкой a . Точки a_i образуют границу $\partial\Gamma$, а точка a является внутренней вершиной графа. Ребра γ_1, γ_3 лежат на одной прямой, а γ_2, γ_4 — на перпендикулярной. Введём обозначение $E(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^4 \gamma_i$. Тогда $\Gamma = E(\Gamma) \cup \{a\}$.

Здесь и всюду ниже мы придерживаемся терминологии и обозначений монографии [1].

На графе-кресте Γ рассматривается краевая задача для вектор-функции (u, φ) :

$$\begin{cases} (p(x)u'')'' - (q(x)u')' + r(x)u = f(x), & x \in E(\Gamma), \\ -(\kappa(x)\varphi')' = \omega(x), & x \in E(\Gamma), \end{cases} \quad (1)$$

где $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf_{E(\Gamma)} p(x) > 0$; $q \in C^1[E(\Gamma)]$, $q \geq 0$; $r \in C[\Gamma]$, $r \geq 0$; $\kappa \in C^1[E(\Gamma)]$, $\inf_{E(\Gamma)} \kappa(x) > 0$; $f \in C[\Gamma]$, $\omega \in C[E(\Gamma)]$.

В узловой вершине a ставятся условия:

$$\begin{aligned} u_i(a) &= u(a), \quad i = \overline{1, 4}, \\ u'_{1\nu}(a) + u'_{3\nu}(a) &= 0, \quad u'_{2\nu}(a) + u'_{4\nu}(a) = 0, \\ \varphi_1(a) &= u'_{2\nu}(a), \quad \varphi_2(a) = -u'_{1\nu}(a), \\ \varphi_3(a) &= -u'_{2\nu}(a), \quad \varphi_4(a) = u'_{1\nu}(a), \\ (p_1 u''_1)(a) - (p_3 u''_3)(a) + (\kappa_2 \varphi'_{2\nu})(a) - (\kappa_4 \varphi'_{4\nu})(a) &= 0, \\ (p_2 u''_2)(a) - (p_4 u''_4)(a) - (\kappa_1 \varphi'_{1\nu})(a) + (\kappa_3 \varphi'_{3\nu})(a) &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 D_\nu^3 u_i(a) + r(a)u(a) &= f(a), \end{aligned} \quad (2)$$

где $D^3 u = (pu'')' - qu'$; индекс ν обозначает, что производная считается в направлении от вершины графа внутрь соответствующего ребра.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2026-1324.

© Цахоев Г.С., 2026

На границе $\partial\Gamma$ задаются общие краевые условия характерные для стержней:

$$\begin{aligned} \rho_i u(a_i) + \alpha_i D_\nu^3 u(a_i) &= 0, & \vartheta_i u'_\nu(a_i) - \beta_i u''(a_i) &= 0, \\ \eta_i \varphi(a_i) - \tau_i \varphi'_\nu(a_i) &= 0, & i &= \overline{1, 4}, \end{aligned} \quad (3)$$

где все коэффициенты $\alpha_i, \rho_i, \vartheta_i, \beta_i, \eta_i, \tau_i$ неотрицательны, причём $\alpha_i + \rho_i > 0$ и $\vartheta_i + \beta_i > 0$ и $\eta_i + \tau_i > 0$ для каждого i .

Замечание. Рассматриваемая задача моделирует малые деформации (изгиб и кручение) плоской стержневой системы, все элементы которой прямолинейны и лежат в одной плоскости. Узел системы – это общий конец четырех различных балок, жестко соединенных между собой. В состоянии равновесия балки расположены в плоскости, образующей граф Γ (см. [2]). Мы предполагаем, что продольные смещения балок отсутствуют и учитываем только вертикальные смещения $u(x)$ и деформации кручения $\varphi(x)$, $x \in \Gamma$.

Теорема 1. Краевая задача (1)–(3) однозначно разрешима, если существует пара индексов i, j такая, что $i \equiv j \pmod{2}$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (с1) $r_i(x) \neq 0$ и $\eta_i + \eta_j > 0$;
- (с2) $q_i(x) \neq 0$ и $(\rho_i + \rho_j) \cdot (\eta_i + \eta_j) > 0$;
- (с3) $(\rho_i + \rho_j)(\vartheta_i + \vartheta_j)(\eta_i + \eta_j) > 0$.

Теорема 2. Краевая задача (1)–(3) однозначно разрешима, если существует пара индексов i, j такая, что $i \not\equiv j \pmod{2}$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (с1) $r_i(x) \neq 0$ и $\vartheta_j > 0$;
- (с2) $q_i(x) \neq 0$, $\rho_j > 0$ и $\sum_{k \equiv j \pmod{2}} \vartheta_k > 0$;
- (с3) $\rho_i \cdot \rho_j \cdot \sum_{i=1}^4 \vartheta_i > 0$.

Литература

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—272 с.
2. Завгородний М. Г. Вариационные принципы построения моделей стержневых стержней// Воронеж: Воронеж. гос. технол. академия,—2000.—Вып. 4.—С. 59–62.

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЁННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ:
МЕТОД НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

О.Б. Цехан (Гродно, ГрГУ)

tsekhan@grsu.by

Рассматривается начальная задача для линейной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием (ЛСВСЗ):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{10}x(t) + A_{11}x(t-h) + A_{20}y(t) + A_{21}y(t-h) + B_1u(t), \\ \mu \dot{y}(t) &= A_{30}x(t) + A_{31}x(t-h) + A_4y(t) + B_2u(t), \quad t \in T, \\ \{x_0(\cdot), y_0(\cdot)\} &= \{(\varphi(\theta), \theta \in T_h), (\psi(\theta), \theta \in T_h)\}, T_h. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $T \triangleq [0, t_1]$, $T_h \triangleq [-h, 0]$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\mu \in (0, \mu^0)$, $\mu^0 \ll 1$, $h = \text{const} > 0$, A_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 0, 1$, A_4 , B_i , $i = 1, 2$, — постоянные матрицы подходящих размеров, $u(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^r)$, $\varphi(\cdot) \in C(T_h; \mathbb{R}^{n_1})$, $\psi(\cdot) \in C(T_h; \mathbb{R}^{n_2})$ — заданные непрерывные функции.

Для ЛСВСЗ (1) на основе представления ее в кольце полиномов от оператора запаздывания e^{-ph} ($e^{-ph}z(t) = z(t-h)$), погружения в семейство систем в кольце степенных рядов в расширенном пространстве состояний с использованием асимптотических, алгебраических методов и операторов преобразований построены равномерные (по t) асимптотические (по μ) аппроксимации k -го порядка $(x^k(t), y^k(t))$, $k = 0, 1, \dots$ решения $(x(t), y(t))$ ЛСВСЗ (1).

Теорема. Пусть выполнены условия: корни $\lambda(A_4)$ характеристического уравнения матрицы A_4 удовлетворяют $\text{Re } \lambda(A_4) < -2\gamma < 0$, где $\gamma = \text{const} > 0$; функции $\varphi(\theta), \psi(\theta)$, $\theta \in T_h$, из начальных условий (1) дифференцируемы и имеют ограниченные производные. Тогда существует $\mu^* > 0$ такое, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ решение начальной задачи (1) равномерно (по t) асимптотически (по μ) аппроксимируется на $T_h \cup T$ согласно формулам

$$x(t) = x^k(t) + O(\mu^{k+1}), \quad y(t) = y^k(t) + O(\mu^{k+1}),$$

$$x^k(t) = \xi^k(t) + \mu \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \sum_{j=0}^{m+2} H_j^m \eta^k \left(\frac{t-jh}{\mu} \right), \quad (2)$$

$$y^k(t) = - \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \sum_{j=0}^{m+1} L_j^m \xi^k(t-jh) + \eta^k \left(\frac{t}{\mu} \right) - \sum_{m,n=0}^{k-1} \mu^{m+n+1} \sum_{j=0}^{m+1} L_j^m \sum_{i=0}^{n+2} H_i^n \eta^k \left(\frac{t-(j+i)h}{\mu} \right), \quad (3)$$

где $(\xi^k(t), \eta^k(\tau)), \xi^k \in \mathbb{R}^{n_1}, \eta^k \in \mathbb{R}^{n_2}, \tau = \frac{t}{\mu},$ – *решение системы*

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^k(t) &= \mathbf{A}_\xi(\mu, e^{-ph})\xi^k(t) + \mathbf{B}_\xi(\mu, e^{-ph})u(t) + F_\xi(t, \mu), \\ \frac{d}{d\tau}\eta^k(\tau) &= \mathbf{A}_\eta(\mu, e^{-p\tilde{h}})\eta^k(\tau) + \mathbf{B}_\eta(\mu, e^{-p\tilde{h}})\tilde{u}(\tau) + F_\eta(\tau, \mu), \\ \xi^k(\theta, \mu) &= \varphi_\xi(\theta, \mu), \eta^k(\tilde{\theta}, \mu) = \psi_\eta(\tilde{\theta}, \mu), \quad \tilde{\theta} = \mu^{-1}\theta, \quad \theta < 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\tilde{h} = \mu^{-1}h,$ матрицы $L_j^m, H_j^m, m = 0, k-1, j = 0, 1, \dots$ и матричные операторы $\mathbf{A}_\xi(\mu, e^{-ph}), \mathbf{B}_\xi(\mu, e^{-ph}), \mathbf{A}_\eta(\mu, e^{-ph}), \mathbf{B}_\eta(\mu, e^{-p\tilde{h}})$ выражены через параметры системы (1), $\tilde{u}(\tau) = u(\mu\tau), \varphi_\xi(\theta, \mu), \psi_\eta(\tilde{\theta}, \mu), F_\xi(t, \mu), F_\eta(\tau, \mu)$ – заданные n_1 - и n_2 -вектор функции возмущений, выраженные через матричные параметры и начальные условия задачи (1).

Таким образом, функции $x^k(t), y^k(t), k = 0, 1, \dots$ (2), (3) выражены через решения задач для систем меньшей размерности (4).

Аналогичные частные случаи получены в [1–3].

Литература

1. Цехан О.Б. Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием / О.Б. Цехан // *Вестник ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2.* — 2024. — Т.14, № 1. — С. 37–47.
2. Цехан О.Б. Асимптотические аппроксимации решений одного класса линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем управления с постоянным запаздыванием / О.Б. Цехан // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* — 2025. — Т. 35, № 4. — С. 578–600.
3. Tsekhan O. Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay / O. Tsekhan // *Dynamic Control and Optimization. DCO 2021.* — Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2021. — Vol. 407. — P. 77–97.

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С РАЗРЫВНЫМ ИСТОЧНИКОМ МОДУЛЬНОГО ТИПА¹

Вэньсинь Чжао, Н.Т. Левашова

(Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)

2219878382@qq.com, levashovant@physics.msu.ru

Рассматривается вопрос о существовании и асимптотической устойчивости стационарного решения задачи.

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, x, \varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

где

$$f(u, x, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u, x, \varepsilon), & u < 0, \\ f^{(+)}(u, x, \varepsilon), & u \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

$f^{(\pm)}(u, x, 0) = 0$, имеет решение $\varphi^{(\pm)}(x)$

Здесь $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ -малый параметр, а $u_{init}(x, \varepsilon)$ —непрерывная функция, имеющая вид фронта.

Под стационарным решением задачи (1) будем понимать решение краевой задачи.

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} &= f(u_s(x), \hat{x}_s, \varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \\ \frac{\partial u_s}{\partial x}(-1, \varepsilon) &= 0, \quad \frac{\partial u_s}{\partial x}(1, \varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

из класса

$$u_s(x, \varepsilon) \in C^1([-1, 1]) \cap C^2((-1, \hat{x}) \cup (\hat{x}, 1)).$$

Существование у задачи (2) решения такого вида доказано в работах [1,2]. В настоящем исследовании получены условия существования устойчивого стационарного решения задачи (2) вида фронта, локализованного в окрестности точки x^* .

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 25-71-10024).

© Чжао Вэньсинь, Левашова Н.Т., 2026

Согласно работе [3] решение стационарной задаче устойчиво, если главное собственное значение задачи на собственные функции отрицательно.

Постановка задачи на собственные значения для уравнений вида (2) содержится в работе [3] и в случае правой части (1) имеет вид

$$\varepsilon^2 G''(\pm) = (f_u(u(x), x) + w)) G(\pm) \quad (3)$$

$$G'(\pm 1) = 0, \quad G(x^*) = \mathcal{P}$$

$$\varepsilon^2 (G'(x^* + 0) - G'(x^* - 0)) = - \left(f^{(-)}(0, x^*) - f^{(+)}(0, x^*) \right) \frac{G(x^*)}{u_x(x^*)}$$

Теорема 1. *Если главное собственное значение задачи (3) отрицательно, при достаточно малом значении ε для решения $u(x, t)$ задачи (1) выполняется предельное равенство*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(x, t, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon)| = 0,$$

Литература

1. Нефедов Н.Н. Движение фронта в задаче со слабой адвекцией в случае непрерывного источника и источника модульного типа / Н.Н. Нефедов, Е.И. Никулин, А.О. Орлов // Дифференциальные уравнения. — 2022 — Т. 58, № 6. — С. 763–776.
2. Павленко В.Н. Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями / В.Н. Павленко // Изв. вузов Матем. — 1998. — №. 11 — С. 69–76.
3. Norbury J. Parabolic Free Boundary Problems Arising in porous Medium Combustion/ J. Norbury, A.M. Stuart // IMA Journal of Applied Mathematics. — 1987. — Т. 39, № 3. — С. 241–257.

СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ В СИСТЕМЕ БЫСТРОГО И МЕДЛЕННОГО УРАВНЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ РАЗРЫВОВ¹

Е.А. Чунжук (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
chunzhukea@my.msu.ru

¹ Работа поддержана грантом РФФ, проект № 25-71-10024.
Е.А. Чунжук является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

© Чунжук Е.А., 2026

В данной работе изучается стационарная сингулярно возмущённая система Тихоновского типа с малым параметром $\varepsilon > 0$. Отличительной чертой постановки задачи являются скачкообразные изменения коэффициентов адвекции и нелинейных источников в точке $x = 0$. Подобные задачи встречаются, например, в физике полупроводников при моделировании процессов в средах с разрывными характеристиками.

Рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^2 A(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, & -1 < x < 1, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - B(v, x) \frac{\partial v}{\partial x} - f(u, v, x, \varepsilon) = 0, & -1 < x < 1. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть заданы условия Дирихле для функции u и v

$$u(-1, \varepsilon) = u^0, \quad u(1, \varepsilon) = u^1, \quad v(-1, \varepsilon) = v^0, \quad v(1, \varepsilon) = v^1.$$

Функции $f(u, v, x, \varepsilon)$, $g(u, v, x, \varepsilon)$, $A(u, x)$ и $B(v, x)$ терпят разрыв первого рода в точке $x = 0$, которая делит отрезок на две подобласти $D^{(-)} := (-1, 0)$ и $D^{(+)} := (0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(u, v, x, \varepsilon) &= \begin{cases} f^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(-)}, \\ f^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \\ g(u, v, x, \varepsilon) &= \begin{cases} g^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(-)}, \\ g^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \\ A(u, x) &= \begin{cases} A^{(-)}(u, x), & x \in D^{(-)}, \\ A^{(+)}(u, x), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \\ B(v, x) &= \begin{cases} B^{(-)}(v, x), & x \in D^{(-)}, \\ B^{(+)}(v, x), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

причем $f^{(-)}(u, v, 0, \varepsilon) \neq f^{(+)}(u, v, 0, \varepsilon)$, $g^{(-)}(u, v, 0, \varepsilon) \neq g^{(+)}(u, v, 0, \varepsilon)$.

В ходе работы доказаны существование и асимптотическая устойчивость стационарного решения, обладающего внутренним переходным слоем, для сингулярно возмущённой задачи (1)–(2). Построена формальная асимптотика согласно алгоритму А.Б. Васильевой, на базе которой были сконструированы верхнее и нижнее решения. Это позволило использовать метод дифференциальных неравенств для обоснования существования решения исходной задачи.

Литература

1. Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Высш. шк., 1990. — 207 с.
2. Нефёдов Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции-диффузии-адвекции: теория и применение / Н.Н. Нефёдов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2021. — Т.61, № 12. — С. 2074–2094.
3. Левашова Н.Т. Стабилизация фронта в среде с разрывными характеристиками / Н.Т. Левашова, Е.А. Чунжук, А.О. Орлов // Теор. мат. физ. — 2024. — Т.220, № 1. — С. 93–112.
4. Karamyshev A. Existence and Stability of Stationary Solutions with Boundary Layers in a Tikhonov-Type System Arising in the Drift-Diffusion Model of Semiconductors of Sub-Debye-Length / A. Karamyshev, E. Nikulin // Russ. J. Math. Phys. — 2025. — V.32. — P. 713–727.
5. Нефёдов Н.Н. Существование и устойчивость стационарных решений с пограничными слоями в системе быстрого и медленно-го уравнений реакция-диффузия-адвекция с KPZ-нелинейностями / Н.Н. Нефёдов, А.О. Орлов // Теор. мат. физ. — 2024. — Т.220, № 1. — С. 137–153.

ВЗВЕШЕННОЕ КОМБИНИРОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧАХ ПРЕДИКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ¹

Е.М. Чураков, П.В. Голубцов

(Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)

churakovem@ty.msu.ru

В задачах оптимального предиктивного управления (англ. MPC) параметры системы нередко испытывают периодический дрейф, обусловленный сезонными условиями эксплуатации или регулярными циклами нагрузки. Один из подходов к учету дрейфа — экспоненциальное забывание с фиксированным коэффициентом α — не различает характер изменений: релевантная информация одного сезона забывается наравне с устаревшей.

¹ Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

© Чураков Е.М., Голубцов П.В., 2026

Рассматривается дискретная линейная динамическая система

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + \omega_t, \quad (1)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u_t \in \mathbb{R}^m$ — управляющее воздействие, A_t, B_t — матричные параметры, подверженные дрейфу.

В работе [1] показано, что накопленную калибровочную информацию удобно представлять матрицей $C \in \mathbb{R}^{(2n+m) \times (n+m)}$ фиксированного размера, не зависящего от объёма данных:

$$C = \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = \sum_t \begin{pmatrix} x_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} y_{t-1}^T, \quad y_t = \begin{pmatrix} x_t \\ u_t \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Оценка параметров восстанавливается из C по формуле $(\widehat{A}, \widehat{B}) = GH^{-1}$.

Периодическое накопление и взвешенное комбинирование. Пусть история работы системы разбивается на периоды $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_K$ (например, календарные месяцы). Для каждого периода \mathcal{P}_k накапливается отдельная каноническая матрица $C^{(k)}$. В текущий момент времени τ оценка строится на основе взвешенной суммы

$$C(\tau) = \sum_{k=1}^K w_k(\tau) C^{(k)}, \quad (3)$$

Конструкция (3) отвечает «взвешенному» функционалу

$$Q(A, B) = \sum_{k=1}^K w_k(\tau) \sum_{t \in \mathcal{P}_k} \|x_t - Ax_{t-1} - Bu_{t-1}\|^2. \quad (4)$$

Схемы выбора весов. Предлагается рассмотреть три семейства схем.

Схема 1. Экспоненциальное убывание по давности периода:

$$w_k(\tau) = \alpha^{d(\tau, k)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (5)$$

Схема 2. Сезонные веса:

$$w_k(\tau) = \exp\left(-\frac{\varphi(\tau, k)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (6)$$

Схема 3. Совместный учёт давности и сезонности:

$$w_k(\tau) = \alpha^{d(\tau, k)} \cdot \exp\left(-\frac{\varphi(\tau, k)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (7)$$

В дальнейшем предполагается рассмотреть более общий случай: адаптивный выбор коэффициента забывания в зависимости от наблюдаемого темпа изменения параметров системы.

Литература

1. Чураков Е.М. Калибровка и оптимальное управление для неточных предиктивных моделей / Е.М. Чураков, П.В. Голубцов // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. — 2025. — № 6. — 2560103.
2. Smith C.L. Advanced Process Control Beyond Single-Loop Control. — Hoboken : Wiley, 2010. — 200 p.
3. Morari M. Model predictive control: past, present and future / M. Morari , J.H.Lee // Computers & Chemical Engineering. — 1999. — Vol. 23. — P. 667–682.
4. Golubtsov P.V. Information Spaces and Efficient Information Accumulation in Calibration Problems // Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies. — 2023. — Vol. 158. — P. 53–62.

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИЯ-АДВЕКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ В СЛУЧАЕ МОДУЛЬНОГО РАЗРЫВА АДВЕКЦИИ¹

Хань Чэн, Юйсюань Вэй (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
chenghan99999@qq.com, 591056451@qq.com

Рассмотрим краевую задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = A(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial |u|}{\partial y} + K(u) \cdot q(x, y, t) = 0, \\ x \in \mathbb{R}, y \in (0, a), t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0, t) = u^0(x, t), u(x, a, t) = u^a(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, y, t) = u(x + L, y, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, a], \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, y, t) = u(x, y, t + T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, a], \quad t \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Здесь ε — малый параметр, $u^0(x, t)$, $u^a(x, t)$, $A(x, y, t)$ и $q(x, y, t) > 0$ — достаточно гладкие T — периодические по переменной t , L — периодические по переменной x .

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ им. М.В. Ломоносова

$$K(u) = \begin{cases} k^{(-)}, & u < 0, \\ k^{(+)}, & u > 0, \end{cases} \quad 0 < k^{(-)} < k^{(+)}.$$

Мы будем исследовать решение задачи, которое имеет вид движущегося фронта, и резко изменяется от значений на поверхности до значений на другой поверхности в окрестности кривой $y = h(x, t)$. В этом случае говорят, что решение задачи имеет внутренний переходный слой в окрестности этой кривой.

Обратная задача (задача граничного управления), заключается в нахождении одного из граничных условий

$$u^a(x, t) := H(t) = H_0(t) + \varepsilon H_1(t),$$

при котором фронт будет двигаться по заданному временному закону. Второе граничное условие $u^0(t)$ при этом считается известным.

Асимптотический метод дифференциальных неравенств позволяет установить коридор ошибок

$$|h(x, t) - h_\beta(x, t)| \leq \varepsilon \delta(t),$$

определив функцию $\delta(t)$. Этот метод заключается в построении функций $\alpha(x, t, \varepsilon)$ и $\beta(x, t, \varepsilon)$, которые называются соответственно нижним и верхним решениями задачи.

Функцию $\delta(t)$ можно оценить, исходя из верхнего и нижнего решений.

Литература

1. Нефедов Н.Н. Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость / Н.Н. Нефедов // Дифференц. уравнения — 2000. — Т. 36, № 2 — С. 262—269.
2. Волков В.Т. Асимптотическое решение задачи граничного управления для уравнения типа Бюргерса с модульной адвекцией и линейным усилением / В.Т. Волков, Н.Н. Нефедов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2022 — Т. 62, № 11. — С. 1851—1860.
3. Нефедов Н.Н. Движение фронта в задаче со слабой адвекцией в случае непрерывного источника и источника модульного типа / Н.Н. Нефедов, Е.И. Никулин, А.О. Орлов // Дифференциальные уравнения. — 2022 — Т. 58, № 6. — С. 763—776.

**ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ
НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
В НЕРЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ**

Ш. ЧЭН (Москва, МГУ)
chengshiyao@cs.msu.ru

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с иррегулярной особенностью

$$b_2(r)u''(r) + b_1(r)u'(r) + b_0(r)u(r) = f(r) \quad (1)$$

где $b_m(r)$, $m = 0, 1, 2$, — мероморфные функция вида $b_m(r) = r^{q_m} c_m(r)$, $c_m(r)$ голоморфны и $c_m(0) \neq 0$, а $q_m \in \mathbb{Z}$. $f(r)$ — ресургентная функция экспоненциального роста, которая имеет вид, что решение соответствующего однородного уравнение. А именно

$$f(r) = \exp\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_i}{r^i}\right) r^\sigma \sum_{i=0}^{\infty} C_i r^i, \quad A_i, C_i, \sigma \in \mathbb{C}, \quad A_{k-1} \neq 0. \quad (2)$$

Отметим, что в работе 1 показано, что с помощью преобразований, таких как умножение на степенную функцию и дифференцирование, исходное уравнение (1) может быть приведено к виду

$$\left(-r^k \frac{d}{dr}\right)^2 u(r) + a_1(r) \left(-r^k \frac{d}{dr}\right) u(r) + a_0(r)u(r) = f(r), \quad (3)$$

где k — неотрицательное целое число, r — комплексная переменная, $a_0(r)$, $a_1(r)$ — голоморфные функции. В работе 1 также найдено минимальное значение k . Если $k = 0$, то точка $r = 0$ является неособой. Если $k = 1$ (регулярная особая точка) правую часть следует выбирать с конормальной асимптотикой, и решение однородного и неоднородного уравнений обладают конормальными асимптотиками. В настоящей работе рассматривается случай $k \geq 2$. на основе результата из работы 2. Сформулируем теорему:

Теорема 1. Пусть выполнено нерезонансное условие, то есть ведущий экспоненциальный параметр A_{k-1} правой части (2) не совпадает с корнями основного символа. Тогда существует частное решение $u_p(r)$ уравнения (3), соответствующее правой ча-

сти (2), причём $u_p(r)$ допускает экспоненциально-степенное разложение вида

$$u_p(r) \sim \exp\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_i}{r^i}\right) r^{\sigma_0} \sum_{i=0}^{\infty} B_i r^i. \quad (4)$$

Целью данной работы является описание структуры коэффициентов в асимптотическом разложении (4) и зависимости этих коэффициентов от корневой структуры основного символа $H_0(p)$.

Утверждение 1. Пусть выполнено нерезонансное условие, и правая часть уравнения (3) имеет вид (2). Тогда в представлении частного решения (4) показатель степени совпадает с показателем правой части: $\sigma_0 = \sigma$.

Теорема 2. Пусть основной символ уравнения (3) имеет простые корни, а правая часть имеет вид (2); пусть также выполнено нерезонансное условие. Тогда коэффициенты асимптотического разложения частного решения в нерезонансном случае при $k \geq 2$ определяются из треугольной системы линейных уравнений. Диагональный элемент этой системы во всех случаях имеет вид $A_{k-1}^2 + a_1^0 A_{k-1} \neq 0$.

Теорема 3. Пусть основной символ уравнения (3) имеет кратные корни. Тогда любое неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с вырождением $k \geq 2$ в нерезонансном случае можно привести либо к уравнению фуксова типа с регулярной особой точкой, либо к уравнению с простыми корнями основного символа и меньшим порядком вырождения.

Литература

1. Кац Д.С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов / Д.С. Кац // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1612–1617.
2. Коровина М.В. Асимптотики решений неоднородных уравнений со старшими вырождениями / М.В. Коровина // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 2. — С. 255–259.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ

М.В. Шамолин (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова)
shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) [1, 2, 3] облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для них коэффициенты искомым инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4, 5, 6]). Наш подход в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимый нетривиальный тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий.

Такие традиционные понятия, как «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др., для систем классической механики вполне естественны. Поскольку в работе изучаются системы на (ко)касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Исследование «в целом» начинается с изучения приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой ускорение движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, рассматриваются как обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (ко)касательного пространства (по одной из квазискоростей системы), получим силовое поле (генератор сдвига) с диссипацией разного знака.

Словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» — это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются дисси-

пативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В предлагаемой работе силовое поле (генератор сдвига системы) разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем произвольного порядка. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

Литература

1. Poincaré H. Calcul des probabilités / Poincaré H. — Gauthier-Villars, Paris. 1912. — 340 p.
2. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе / Колмогоров А.Н. // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 93, № 5. — С. 763–766.
3. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 2019. — Т. 74, № 1(445). — С. 117–148.
4. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 491, № 1. — С. 95–101.
5. Шамолин М.В. Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 512, № 1. — С. 10–17.

6. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 500, № 1. — С. 78–86.

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)
nashanin@inbox.ru

$$P = \sum_{k,j=1}^n a_{k,j}(x) D_k D_j + \sum_{k=1}^n a_k(x) D_k + a_0(x), \quad (1)$$

— линейный дифференциальный оператор с вещественно аналитическими коэффициентами, определенный в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $a_{k,j}(x) = a_{j,k}(x)$, $D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ (обозначения см. [1]). Предположим, что коэффициенты $a_{k,j}(x)$ вещественнозначны и обозначим через $K_x(P) \subset T_x^*(\Omega)$ ядро симметрической билинейной формы $\mathcal{B}_x(\eta, \xi) = \sum_{k,l=1}^n a_{k,l} \eta_k \xi_l$ и через $\mathcal{T}_x(P) = \{\tau \mid \tau(\xi) = 0, \text{ если } (x, \xi) \in \text{Char}(P)\}$ — пересечение характеристических гиперплоскостей. Поскольку $p_2(x, \xi) = \mathcal{B}_x(\xi, \xi)$, то в каждой точке $x \in \Omega$ множество $(x, K_x(P) \setminus \{0\})$ содержится в $\text{Char}(P)$.

Теорема 1. Пусть $x \in \Omega$ и $\mathcal{B}_x(\eta, \xi) \neq 0$. Следующие условия равносильны

- (1) $\{(x, \xi) \mid (x, \xi) \in \text{Char}(P)\} = K_x(P) \setminus \{0\}$;
- (2) форма $\mathcal{B}_x(\xi, \xi)$ не строго знакоопределена;
- (3) $\mathcal{T}_x(P) \neq \{0\}$.

Предположим, что

- (а) ранг матрицы $(a_{k,j}(x))_{k,j=1}^n$ не зависит от $x \in \Omega$.

В этом случае множество $L(P) = \cup_{x \in \Omega} (x, \mathcal{T}_x(P))$ образует подрасслоение в касательном расслоении $T\Omega$. Через $\mathcal{L}(P)$ обозначим дифференциальную систему, порожденную $L(P)$. Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ порождает в C^∞ -модуле $\mathcal{T}\Omega$ сечений касательного расслоения фильтрацию C^∞ -подмодулей \mathcal{H}^j , в которой первый элемент $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}(P)$, а последующие подмодули \mathcal{H}^{j+1} порождаются векторными полями из $\mathcal{L}(P)$ и коммутаторами векторных полей вида $[\mathcal{L}(P), \mathcal{H}^j]$.

Предположим, что

(б) найдется такое натуральное число $1 \leq r \leq n - 1$, что $\mathcal{L}(P) = \mathcal{H}^1 \subsetneq \mathcal{H}^2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{H}^r = \mathcal{H}^{r+1} \subsetneq \mathcal{T}\Omega$, причем размерность $\dim \mathcal{H}_x^r = \text{const}, x \in \Omega$.

В этом случае подмодуль \mathcal{H}^r является голономной дифференциальной системой и в силу теоремы Фробениуса через каждую точку $x^0 \in \Omega$ проходит максимальное связное интегральное подмногообразие $\mathcal{M}_{\mathcal{H}^r, x^0}$. Говорят, что ростки функций $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ равны в точке $x^0 \in \Omega$ и пишут $u_{x^0}^1 \cong u_{x^0}^2$, если $u^1(x) = u^2(x)$ в некоторой открытой окрестности точки x^0 .

Теорема 2. Пусть оператор P вида (1) удовлетворяет равносильным условиям предложения 1 и условиям (а) и (б). Тогда, если коэффициенты оператора являются вещественно аналитическими функциями, то из равенства ростков $u_{x^0}^1 \cong u_{x^0}^2$ в точке $x^0 \in \Omega$ следует равенство $u_x^1 \cong u_x^2$ в точках связной компоненты множества $\mathcal{M}_{\mathcal{H}^r, x^0} \cap \{y \in \Omega \mid (Pu^1)_y \cong (Pu^2)_y\}$, содержащей x^0 .

Теоремы о продолжении решений линейных уравнений высокого порядка с вещественно аналитическими коэффициентами опубликованы в статье [2]. Если коэффициенты уравнения не являются аналитическими функциями, то утверждение теоремы, вообще говоря, не верно. В [3] построен пример уравнения второго порядка с C^∞ -коэффициентами, старшая часть которого имеет аналитические коэффициенты и удовлетворяет всем условиям теоремы, но решения которого не обладают свойством однозначного продолжения вдоль индуцированных интегральных подмногообразий.

Литература

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. (т. 1)/ Л. Хермандер. — М. : Мир, 1986. — 464 с.
2. Шананин Н.А. О продолжении решений линейных уравнений с аналитическими коэффициентами / Н.А. Шананин // Матем. заметки — 2022. — Т. 111, № 6. — С. 921–928.
3. Шананин Н.А. К продолжению ростков решений / Н.А. Шананин // Матем. заметки — 2024. — Т. 115, № 4. — С. 619–625.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С ПАРАМЕТРОМ¹

З.И. Шарифзода, Э.М. Мухамадиев,

И.Дж. Нуров (Душанбе, ТНУ; Вологда, ВоГУ; Душанбе, ТНУ);
sakhara-2803@mail.ru, emuhamadiev@rambler.ru, nid1@mail.ru

В настоящем исследовании рассматривается проблема существования периодических решений (циклов) в классе нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Получены необходимые и достаточные условия существования таких решений, что существенно расширяет область применения метода малого параметра Л. С. Понтрягина в теории динамических систем на плоскости. В отличие от классического метода Понтрягина, в данном подходе не предполагается дифференцируемость всех функций, входящих в систему, кроме того, рассматриваемая система не обладает гамильтоновой структурой.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon f(x, \varepsilon) \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, A -квадратная вещественная матрица, $f(x, \varepsilon)$ – непрерывная вектор – функция по совокупности переменных $(x, \varepsilon) \in R^n \times [\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, ε - параметр. В дальнейшем предполагается, что спектр матрицы A содержит пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\beta$, $\beta > 0$.

По правой части системы (1) определим аналог функции Понтрягина[1]:

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} \left[g_1(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, 0, 0, \dots, 0) \cos \varphi + \right. \\ \left. + g_2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, 0, 0, \dots, 0) \sin \varphi \right] d\varphi.$$

Сформулируем необходимое условие существования периодических решений системы (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$.

Сформулированное необходимое условие при некоторых дополнительных ограничениях поведения функции $F(\rho)$ в окрестности решения уравнения $F(\rho) = 0$ является также и достаточным условием

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке НИИ ТНУ (проект № 0126ТJ01727).

© Шарифзода З.И., Мухамадиев Э.М., Нуров И.Дж., 2026

существования периодического решения системы (1) при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$, а именно справедливо следующая теорема

Теорема 1. *Предположим, что для некоторой последовательности значений $\varepsilon = \varepsilon_k \neq 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$, при $k \rightarrow \infty$ система (1) имеет периодические решения $x(t + \omega_k, \varepsilon_k) \equiv x(t, \varepsilon_k)$, с наименьшим периодом $\omega_k = \omega(\varepsilon_k) > 0$, удовлетворяющие условию $C_1 \leq \|x(t, \varepsilon_k)\| < C_2$, где $0 < C_1 < C_2$ — заданные числа. Тогда существует такое $\rho_0 \geq C_1$, что $F(\rho_0) = 0$.*

Теорема 2. *Пусть $\rho_0 > 0$ решение уравнение $F(\rho) = 0$, и в окрестности $[\rho_0 - \delta_0, \rho_0 + \delta_0]$, точки ρ_0 , где $\rho_0 - \delta_0 > 0$ функция $F(\rho) \neq 0$ при $\rho \neq \rho_0$, причем $F(\rho_0 - \delta_0) \cdot F(\rho_0 + \delta_0) < 0$. Тогда система (1) при достаточно малых значениях $|\varepsilon| > 0$ имеет нестационарное $\omega(\varepsilon)$ — периодическое решение $x(t, \varepsilon)$.*

Литература

1. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. —М. : Наука, 1976. — 496 с.
2. Понтрягин Л.С. О динамических системах, близких к гамильтоновым / Л.С. Понтрягин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. - 1934. —Т. 4, № 8. — С. 234-236.
3. Шарифзода З.И. О циклических решениях уравнения Понтрягина с малым параметром / З.И. Шарифзода, Э.М. Мухамадиев, И.Дж. Нуров // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. —2021. —С. 167-171.
4. Grishanina G.E. Analysis of the existence of periodic solutions of the systems of nonlinear differential equations with a small parameter / G.E. Grishanina, E.M. Muhamadiev, I.D. Nurov, Z.I. Sharifzoda // Vladikavkaz Mathematical Journal 2025 , Volume 27, Issue 3, P. 28–39.
5. Красносельский М. А. Топологические методы и теории нелинейных интегральных уравнений / М. А. Красносельский. -Москва: Наука, 1956. -392 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

С СУММИРУЕМЫМ С КВАДРАТОМ ЯДРОМ, ОПРЕДЕЛЯЕМОГО НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ¹

А.Н. Шелковой (Воронеж, ВГТУ)
shelkovej.aleksandr@mail.ru

Рассматривается интегро-дифференциальный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$, задаваемый выражением

$$\mathcal{L}y = -\ddot{y} - \int_0^1 K(t, s)x(s)ds \quad (1)$$

и нелокальными краевыми условиями

$$y(0) = \int_0^1 a_0(t)y(t)dt, \quad y(1) = \int_0^1 a_1(t)y(t)dt. \quad (2)$$

Здесь a_0 и a_1 - функции из $L_2[0, 1]$.

Исследуется случай, когда ядро $K(t, s)$ принадлежит гильбертову пространству $L_2([0, 1]^2)$.

Методом подобных операторов получены асимптотические оценки собственных значений и собственных функций этого оператора.

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 1987. — 164 с.
2. Баскаков А.Г. Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями / А.Г. Баскаков, Т.К. Кацаран // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 8. — С. 1424–1433.
3. Шелковой А.Н. Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка, определяемого нелокальными краевыми условиями / А.Н. Шелковой // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2018. — Т. 21, № 4. — С. 18–33.
4. Шелковой А.Н. Спектральный анализ интегро-дифференциального оператора с вырожденным ядром / А.Н. Шелковой // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2020. — Т. 23, № 3. — С. 76–89.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

© Шелковой А.Н., 2026

ПОСТРОЕНИЕ ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА-БЕССЕЛЯ ПОЛУГРУППОВЫМ МЕТОДОМ¹

Э.Л. Шишкина (Воронеж, ВГУ; Грозный, ЧГУ)
ilina_dico@mail.ru

Пусть $\gamma=(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из положительных действительных чисел $\gamma_i > 0, i=1, \dots, n$, и, пусть, $|\gamma|=\gamma_1+\dots+\gamma_n$.

Оператор Лапласа-Бесселя имеет вид $\Delta_\gamma = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$.

При рассмотрении действия оператора Лапласа-Бесселя на функции многих переменных обычно полагают, что эти переменные не могут принимать отрицательные значения. Поэтому будем иметь дело с n -мерным евклидовым пространством \mathbb{R}^n , открытым ортантом

$$\mathbb{R}_+^n = \{x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}.$$

На отрицательные значения $x_i, i=1, \dots, n$, рассматриваемые нами функции будем продолжать четным образом.

Весовое пространство Лебега $L_\gamma^p(\mathbb{R}_+^n)$ состоит из измеримых на \mathbb{R}_+^n функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\gamma} := \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f \in L_\gamma^1(\mathbb{R}_+^n)$ определяется равенством

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi) = (\mathbf{F}_\gamma)_x[f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) \mathbf{j}_\gamma(x; \xi) x^\gamma dx.$$

Часть пространства Шварца $S(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций, четных по каждой из переменных будем обозначать через $S_{ev}(\mathbb{R}_+^n)$.

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^\gamma \mathbf{T}_x^y f)(x) = {}^\gamma \mathbf{T}_x^y f(x) = ({}^{\gamma_1} T_{x_1}^{y_1} \dots {}^{\gamma_n} T_{x_n}^{y_n} f)(x),$$

¹ Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки (FEGS-2026-0004).
© Шишкина Э.Л., 2026

где каждый из обобщенных сдвигов ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}$ определен при $i=1, \dots, n$ выражением

$${}^{\gamma}T_x^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}) \sin^{\gamma-1} \varphi d\varphi.$$

Оператор

$$(G_t^{\gamma} \varphi)(x) = \frac{t^{-\frac{n+|\gamma|}{2}}}{2^{|\gamma|} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} ({}^{\gamma}T_x^y \varphi)(x) y^{\gamma} dy, \quad \varphi \in L_p^{\gamma}(\mathbb{R}_+^n),$$

назовем *сингулярной диффузионной полугруппой* $\{G_t^{\gamma}\}_{t \geq 0}$.

Теорема 1. *Операторы $\{G_t^{\gamma}\}_{t \geq 0}$ образуют сжимающую полугруппу типа C_0 на $L_p^{\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \leq p < \infty$, и ее генератор A совпадает с замыканием оператора Лапласа-Бесселя Δ_{γ} , определенного на четных шварцевых функциях $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_+^n)$.*

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in S_{ev}(\mathbb{R}_+^n)$. Дробная степень оператора $(-\Delta_{\gamma})$ при $0 < \alpha < 1$ имеет вид*

$$(-\Delta_{\gamma})^{\alpha} \varphi(x) = \frac{2^{2\alpha+n} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+2\alpha}{2}\right)}{\Gamma(-\alpha) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{({}^{\gamma}T_x^y \varphi)(x) - \varphi(x)}{|y|^{n+|\gamma|+2\alpha}} y^{\gamma} dy, \quad (1)$$

а при $1 < \alpha < \ell$, $\ell = 2, 3, \dots$ имеет вид

$$\begin{aligned} & (-\Delta_{\gamma})^{\alpha} \varphi(x) = \\ & = \frac{2^{2\alpha+n} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} + \alpha\right)}{C_{\alpha}(\ell) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\varphi(x) + (-1)^{\ell} \ell! \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \ell \end{matrix} \right\} ({}^{\gamma}T_x^y \varphi)(x) \right) \frac{y^{\gamma} dy}{|y|^{n+|\gamma|+2\alpha}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Отрицательная степень $(-\Delta_{\gamma})$ при $0 < \alpha < 1$ имеет вид

$$(-\Delta_{\gamma})^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{2^{n-2\alpha} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} - \alpha\right)}{\Gamma(\alpha) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} |y|^{2\alpha-n-|\gamma|} ({}^{\gamma}T_x^y \varphi)(x) y^{\gamma} dy. \quad (3)$$

ОБ АЛГОРИТМАХ ОПТИМИЗАЦИИ ПОИСКА ПУТЕЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ ГРАФАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

А.Д. Шляхтер (Воронеж, ВГУ)
shleakhter@gmail.com

Классический алгоритм Дейкстры базируется на шаге релаксации:

$$d(u) + w(u, v)$$

где $d(u)$ - расстояние до промежуточной вершины u , $w(u, v)$ - вес ребра между вершиной v и u .

В статических графах это приводит к нахождению глобального минимума, однако при переходе к динамическим графам, где структура связей постоянно меняется, изменение веса нарушает условие оптимальности Беллмана (Любая часть кратчайшего пути сама является кратчайшим путем между своими точками). Классическая реализация демонстрирует избыточную вычислительную сложность и недостаточную скорость работы, а также требует полной повторной инициализации всего графа:

$$d(s) = 0, \quad d(v) = \infty \quad \forall v \in V, v \neq s$$

Это ставит задачу поиска более эффективных решений, способных адаптироваться к изменениям без полного пересчета всех данных.

Опираясь на принцип Беллмана, можно утверждать: в процессе прохождения по графу и обнаружения неоптимальности пути, нет необходимости изменять весь путь. Достаточно локально изменить значения в узлах, затронутых изменением веса конкретного ребра, и оптимизировать путь до тех пор, пока он снова не станет соответствовать условию оптимальности.

$$d(v) = \min_{u \in \text{Adj}(v)} \{d(u) + w(u, v)\}$$

Воспользуемся алгоритмом D* Lite, который работает по принципу инкрементального обновления - выявление только тех участков графа, которые стали неоптимальными после изменения среды, и исправляет только их.

В каждом узле графа хранятся две оценки расстояния до цели: $g(u)$ - записанная цена из прошлых расчетов, и rhs - вычисленная на данный момент формула Беллмана по соседним ребрам.

$$rhs(u) = \min_{s' \in Succ(u)} (c(u, s') + g(s'))$$

При $g = rhs$ - путь оптимален. При $g \neq rhs$ узел помечается как несогласованный и отправляется в очередь на перерасчет.

Для приоритетности перерасчета используется ключ $[k_1; k_2]$, вычисляемый:

$$k_1(u) = \min(g(u), rhs(u)) + h(s_{start}, u) + k_m$$
$$k_2(u) = \min(g(u), rhs(u))$$

где $h(s_{start}, u)$ - эвристическое расстояние, k_1 - коэффициент отвечающий за выбор направления, k_2 - параметр выбора похожести путей, k_m - корректор пройденного пути.

Алгоритм D* Lite, реализующий принцип инкрементального обновления, обеспечивает более высокую скорость поиска оптимального пути в динамических графах по сравнению с алгоритмом Дейкстры. Это достигается за счет исключения полной повторной инициализации графа, а также путем концентрации вычислений только на измененных участках графа.

Литература

1. Дейкстра Э. В. Заметка о двух задачах, связанных с графами / Э. В. Дейкстра // Алгоритмы и структуры данных. — 1959. — № 1. — С. 269–271.
2. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. — М. : Изд-во иностр. лит., 1960. — 400 с.
3. Koenig S. D* Lite / S. Koenig, M. Likhachev // Eighteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-02). — 2002. — P. 476–483.
4. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен — М. : Вильямс, 2013. — 1328 с.

ФУНКЦИОНАЛ ПОТЕРЬ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.Г. Шорохов (Москва, РУДН им. П. Лумумбы)

shorokhov-sg@rudn.ru

Рассмотрим задачу построения функционала потерь [1,2] для обучения нейронной сети, аппроксимирующей решение краевой задачи для неоднородного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = g(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in \Omega \quad (1)$$

с областью $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ в форме пятиугольника с вершинами в точках $\Gamma_0(2\pi, -\pi)$, $\Gamma_1(\pi, -\pi)$, $\Gamma_2(0, 0)$, $\Gamma_3(\pi, \pi)$, $\Gamma_4(2\pi, 0)$. Участки $\Gamma_2\Gamma_3$, $\Gamma_1\Gamma_2$, $\Gamma_3\Gamma_4$ границы $\partial\Omega$ обозначим через γ , l_1 , l_2 соответственно. Граничные условия для уравнения (1) зададим в виде [3]:

$$\begin{cases} u|_{\gamma} = \varphi(s), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}|_{\gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\gamma} = \psi(s), \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{l_1} = \chi(s), \\ u|_{l_2} = \omega(s), \end{cases} \quad (2)$$

где $(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \psi, \chi, \omega) \in L_2(\gamma \times \gamma \times \gamma \times l_1 \times l_2)$, $g \in L_2(\Omega)$, \mathbf{n} – направление внешней нормали, \mathbf{s} – положительное направление вдоль $\partial\Omega$. Пусть вспомогательная функция Θ определяется формулой:

$$\Theta(\xi, \eta) = \begin{cases} \Psi(\xi) - \Psi(\eta), & (\xi, \eta) \in \Omega_1 = \Omega \cap \{(\xi, \eta) : \xi < \pi, \eta > 0\}, \\ \Psi(2\pi - \xi) - \Psi(\eta), & (\xi, \eta) \in \Omega_2 = \Omega \cap \{(\xi, \eta) : \xi > \pi, \eta > 0\}, \\ \Psi(2\pi - \xi) - \Psi(0), & (\xi, \eta) \in \Omega_3 = \Omega \cap \{(\xi, \eta) : \xi > \pi, \eta < 0\}, \\ \Psi(\xi) - \Psi(0), & (\xi, \eta) \in \Omega_4 = \Omega \cap \{(\xi, \eta) : \xi < \pi, \eta < 0\}, \end{cases}$$

где

$$\Psi(\lambda) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\lambda \left(\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial s} + \psi(\tau) \right) d\tau, \lambda \in [0, \pi].$$

При помощи симметризирующего оператора В.М. Филиппова [3] можно построить следующую вариационную формулировку.

Теорема. Вариационный функционал из [3] для краевой задачи (1)-(2) может быть записан в виде

$$\begin{aligned}
 D[u] = & \int_{\Omega} u^2(\xi, \eta) d\xi d\eta - 2 \int_{\Omega} \int_{\gamma \cup l_1(\eta)}^{\xi} \int_{\gamma \cup l_2(\zeta)}^{\eta} g(\zeta, \tau) d\tau d\zeta u(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\
 & - 2 \int_{\Omega} \Theta(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta - 2 \int_{\Omega_1 \cup \Omega_4} \varphi(\xi) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\
 & + 2 \int_{\Omega_3 \cup \Omega_4} \int_{\eta}^0 \chi(\tau) d\tau u(\xi, \eta) d\xi d\eta - 2 \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} \omega(2\pi - \xi) u(\xi, \eta) d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

Функционал $D[u]$ не содержит производных функции $u(\xi, \eta)$ и может быть использован в качестве функционала потерь при обучении нейронной сети, аппроксимирующей решение краевой задачи (1)-(2). Нейронная сеть для краевой задачи (1)-(2) может быть обучена с использованием функционала $D[u]$ при помощи алгоритма из [4].

Литература

1. Савчин В.М. Обратные задачи вариационного исчисления и их приложения / В.М. Савчин, В.М. Филиппов, С.Г. Шорохов. — М.: РУДН, 2026. — 383 с.
2. Shorokhov S.G. Deep Wave Equation Modeling with Quasiclassical Variational Principle / S.G. Shorokhov // J. Math. Sci. — 2025. — Vol. 294, No. 2. — P. 194–205.
3. Филиппов В.М. Вариационный метод решения краевых задач для волнового уравнения / В.М. Филиппов // Дифференц. уравнения. — 1984. — Т. 20, № 11. — С. 1961–1968.
4. Shorokhov S.G. Improving Physics-Informed Neural Networks via Quasiclassical Loss Functionals / S.G. Shorokhov // Moscow Univ. Phys. Bull. — 2024. — Vol. 79, Suppl. 2. — P. S920–S927.

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КОШИ–РИМАНА
С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
В ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ**

Н.В. Якивчик (Москва, НИУ МЭИ)

YakivchikNV@mpei.ru

В односвязной области D комплексной плоскости \mathbb{C} , ограниченной простым кусочно-гладким ляпуновским контуром Γ , рассмотрим нелинейное уравнение

$$\partial_{\bar{z}} u - a(z) u(z) - f(z) \frac{u(z)}{\sqrt[s]{u(z)}} = 0, \quad (1)$$

где $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a(z), f(z) \in L^p(D)$, $p > 2$.

Уравнения с оператором Коши–Римана $\partial_{\bar{z}}$ интегрируются с помощью оператора Помпейю–Векуа [1]

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{\varphi(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Omega(z) = \frac{1}{s}(Ta)(z) + h(z), \quad \text{где} \quad h(z) = \frac{1}{2s\pi i} \int_{\Gamma} (Ta)(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

В предположении $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$ общее решение уравнения (1) в классе $u \in W_{loc}^{1,p}(D)$ задается формулой

$$u = \left(e^{\Omega} \left(\varphi + \frac{1}{s} T(e^{-\Omega} f) \right) \right)^s, \quad (2)$$

где $\varphi \in C(\bar{D})$ — произвольная аналитическая в области D функция.

Интегральное представление (2) позволяет для уравнения (1) решать следующие типы краевых задач:

Краевая задача типа Дирихле: найти регулярное решение u уравнения (1) по краевым условиям

$$\operatorname{Re} e^{-\frac{1}{s}\Omega} \sqrt[s]{u}|_{\Gamma} = g,$$

где функция $g \in C^\nu(\Gamma)$.

Краевая задача типа Римана–Гильберта: найти регулярное решение u уравнения (1) по краевым условиям

$$\operatorname{Re} G(t) \sqrt[s]{u}|_{\Gamma} = g(t), \quad t \in \Gamma,$$

где коэффициент $G(t) \in H(\Gamma)$ и всюду отличен от нуля, $g(t) \in H(\Gamma)$.

Относительно аналитической функции $\varphi(z)$ задача принимает вид

$$\operatorname{Re} \tilde{G}(t) \varphi|_{\Gamma} = \tilde{g}(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $\tilde{G}(t) = e^{\frac{1}{s}T^a} G(t)$, $\tilde{g}(t) = g(t) - \frac{1}{s} \operatorname{Re} G(t) T(e^{-\frac{1}{s}T^a} f)$; эта задача, в свою очередь, представляется в форме задачи линейного сопряжения $\varphi^+ - G_1 \varphi^- = g_1$, которая решается с помощью канонической функции $X(z)$ [2]. Пусть $\omega(z)$ обозначает конформное отображение области D на единичный круг.

Теорема. *Индекс задачи Римана–Гильберта для уравнения (1) равен $1 - 2\kappa$, где $\kappa = \frac{1}{2\pi} \arg G(t)|_\Gamma$. Все решения задачи в классе $H(\bar{D})$ описываются формулой*

$$u = \left(e^\Omega \left(\varphi + \frac{1}{s} T(e^{-\Omega} f) \right) \right)^s,$$

$$\varphi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{g_1(t)}{G(t) X^+(t)} \frac{\omega'(t) dt}{\omega(t) - z} + X(z) p[\omega(z)],$$

где $p \in P_{-2\kappa}^0$, а функция g_1 удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_\Gamma \frac{g_1(t)}{G(t) X^+(t)} q[\omega(t)] \omega'(t) dt = 0, \quad q \in P_{2\kappa-2}^0.$$

Те же задачи решаются для уравнения с сингулярным коэффициентом

$$\partial_{\bar{z}} u - \frac{a(z)}{|z|^\alpha} u(z) - f(z) \frac{u(z)}{\sqrt[s]{u(z)}} = 0, \quad (3)$$

где $a(z)$ — функция, которая n раз непрерывно дифференцируема в окрестности нуля, $n = [\alpha]$ — целая часть α , $\alpha \geq 1$.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 510 с.
2. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. М. : Наука, 1968. — 512 с.

SCHAUDER-TYPE ESTIMATES UP TO THE BOUNDARY FOR ELLIPTIC OPERATORS WITH CONSTANT COEFFICIENTS¹

V.G. Alili (Baku, Baku Slavic University)
alilivefa@mail.ru

Let $\Omega' \subset R^{n-1}$ be a bounded domain with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega'$. $P = (x'; x_n)$, where $x' \in \Omega'$ and $x_n \in (0, T)$. Let

1

© Alili V.G., 2026

$\hat{s}_l = (s_k)_1^l \in Z_+^l : 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_l \leq m - 1$. Consider the following Boundary value problem

$$L(P; \partial) u(P) = f(P), \quad P \in \Omega,$$

$$B_j(\xi; \partial) u(\xi) = \varphi_j(\xi), \quad j = \overline{1, l},$$

for an m -th order elliptic operator (where m is even & $l = \frac{m}{2}$)

$$L(\cdot; \partial) u(\cdot) = L'(\cdot; \partial) u(\cdot) + L''(\cdot; \partial) u(\cdot),$$

where

$$L'(\cdot; \partial) u(\cdot) = \sum_{|\beta|=m} a_\beta(\cdot) \partial^\beta u(\cdot); L''(\cdot; \partial) u(\cdot) = \sum_{|\beta| \leq m-1} a_\beta(\cdot) \partial^\beta u(\cdot).$$

The boundary operators have the form

$$B_j(\cdot; \partial) u(\cdot) = B'_j(\cdot; \partial) u(\cdot) + B''_j(\cdot; \partial) u(\cdot),$$

where

$$B'_j(\cdot; \partial) u(\cdot) = \sum_{|\alpha|=s_j} b_{\alpha;j}(\cdot) \partial^\alpha u(\cdot); B''_j(\cdot; \partial) u(\cdot) = \sum_{|\alpha| < s_j} b_{\alpha;j}(\cdot) \partial^\alpha u(\cdot).$$

Assume that these operators satisfy the following conditions.

(i) The operator L is uniformly elliptic on $\bar{\Omega}$, i.e. $\exists \delta \in (0, 1]$ such that

$$\delta |\xi|^m \leq |L'(P; \xi)| \leq \delta^{-1} |\xi|^m, \quad \forall P \in \bar{\Omega}; \quad \forall \xi \in R^n.$$

(ii) For every point $P^* = (x^*; 0) \in \Omega'$ the system with constant coefficients, consisting of the elliptic operator $L'(P^*; \partial)$ and the boundary operators $B'_j(P^*; \partial)$, $j = \overline{1, l}$, satisfies the complementing condition uniformly on $P^* \in \Omega'$.

Consider the following elliptic operator

$$L_0 u = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha^0 \partial^\alpha u,$$

and the boundary conditions

$$b_i^0 u = \sum_{|\alpha|=s_i} b_{\alpha;i}^0 \partial^\alpha u, \quad i = \overline{1, l}; \quad 0 \leq s_1 < \dots < s_l \leq m - 1,$$

with the constant coefficients. The following theorem is true.

Theorem 1. Let the system of operators $\{L_0; b_j^0, j = \overline{1, l}\}$ satisfy the conditions (i) and (ii). Let $f \in L_p(B_r^+)$ and $(\varphi_k)_1^l \in W_p^m(B_r'; \hat{s}_l), 1 < p < +\infty$. Then the Boundary value problem

$$\left. \begin{aligned} (L_0 u)(P) &= f(P), \quad P \in B_r^+, \\ (b_j^0 u)(\xi) &= \varphi_j(\xi), \quad j = \overline{1, l}, \xi \in B_r', \\ \text{supp } u &\subset B_r^+, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

has a unique solution $u \in W_p^m(B_r^+)$ and the following estimate holds for the solution

$$\|u\|_{W_p^m(B_r^+)} \leq C \left(\|f\|_{L_p(B_r^+)} + \|(\varphi_j)_1^l\|_{W_p^m(B_r'; \hat{s}_l)} \right),$$

where the constant $C > 0$ is independent of the right-hand side of (1).

INVERSE POSITIVENESS OF A DIFFERENTIAL OPERATOR ON A GRAPH¹

V. Eloeva, R. Kulaev (Vladikavkaz, NOSU, SMI VSC RAS)
kulaevrch@mail.ru

We study the positive invertibility of the linear differential operator L_r of the fourth-order boundary value problem on a graph that arises in modeling Euler-Bernoulli beam systems. We briefly write the corresponding boundary value problem as

$$L_r u \equiv L_0 u + r(x)u = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Gamma} = (\vartheta u' - \beta u'')|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Here L_r is a differential operator with the forcing term $r(x)u$; the operator L_0 is defined by Euler-Bernoulli beam equations on the edges of Γ , and by sets of the rigid joint conditions at the junction nodes [1,2]; $\partial\Gamma$ is the boundary of Γ .

By a differential equation (1) on a graph, following [1,3], we understand the set of differential equations on the edges and the set of consistency conditions at the interior vertices. The equations on the edges have the form

$$(p(x)u'')'' + r(x)u = f(x), \quad x \in E(\Gamma), \quad (3)$$

¹ This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. Grant 075-02-2026-1324.

© Eloeva V.A., Kulaev R.Ch., 2026

where $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf_{x \in \Gamma} p(x) > 0$, and $r, f \in C[\Gamma]$.

At each junction node $c \in J(\Gamma)$, $|I(c)| \geq 3$, we impose the following transmission conditions:

$$\begin{aligned} u_i(c) &= u(c), \quad \forall i \in I(c), \\ u'_i(c) &= \alpha_{ki}(c)u'_k(c) + \alpha_{ji}(c)u'_j(c), \quad \forall i \in I(c) \setminus \{j, k\}, \\ \sum_{i \in I(c)} \alpha_{ki}(c)(p_i u''_i)(c) &= 0, \quad \sum_{i \in I(c) \setminus \{j, k\}} \alpha_{ji}(c)(p_i u''_i)(c) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\sum_{i \in I(c)} (p_i u''_i)'(c) + r(c)u(c) = f(c), \quad c \in J(\Gamma). \tag{5}$$

Here k and j are fixed indices from $I(c)$; $\alpha_{ki}(c)$, $\alpha_{ji}(c)$ are given real numbers.

The system of relations (3)–(5) is called *the differential equation on the graph* Γ and is denoted by $L_0 u = f(x)$. A *solution* of this equation is any function $u(x) \in C^4[\Gamma]$ continuous on Γ that satisfies the corresponding ordinary differential equation (3) on $E(\Gamma)$ and obeys conditions (4), (5) at each inner vertex.

Thus, the differential operator $L_0 : D \rightarrow C[\Gamma]$ is defined by relations

$$\begin{aligned} D &= \{u \in C^4[\Gamma] : u \text{ satisfies (4) on } J(\Gamma)\}, \\ L_0 u(x) &:= \begin{cases} (p(x)u''(x))', & x \in E(\Gamma), \\ \sum_{i \in I(x)} (p_i(x)u''_i)'(x), & x \in J(\Gamma); \end{cases} \\ L_r u(x) &:= L_0 u(x) + r(x)u(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{6}$$

Throughout we assume that the graph Γ is a tree.

For each vertex $a \in \partial\Gamma$, we define a pair of functions w_a, v_a that are solutions of the equation $L_r u(x) = 0$, $x \in \Gamma$, satisfying the following boundary condition

$$\begin{aligned} w_a(a) &= 1, \quad \vartheta(a)w'_a(a) - \beta(a)w''_a(a) = 0, \\ w_a|_{\partial\Gamma \setminus a} &= (\vartheta w'_a - \beta w''_a)|_{\partial\Gamma \setminus a} = 0; \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} v_a(a) &= 0, \quad \vartheta(a)v'_a(a) - \beta(a)v''_a(a) = 1, \\ v_a|_{\partial\Gamma \setminus a} &= (\vartheta v'_a - \beta v''_a)|_{\partial\Gamma \setminus a} = 0. \end{aligned}$$

Definition 1. *The differential operator L_r is said to be nonoscillatory on a graph Γ if for each vertex $a \in \partial\Gamma$ the corresponding solution v_a is positive on Γ .*

Definition 2. We say that the operator $L_{r+\lambda\rho}$ is critically nonoscillatory on Γ if for each vertex $a \in \partial\Gamma$ the corresponding solution $v_a(x, \lambda)$ is positive on Γ and if there is a vertex $a_0 \in \partial\Gamma$ such that the solution $v_{a_0}(x, \lambda)$ has a triple zero at some boundary vertex.

Let us consider functions $r_*, r^* \in C[\Gamma]$. Denote by L_{r_*}, L_{r^*} differential operators generated by relations (6) with the coefficient $r = r_*$ and $r = r^*$, respectively.

Lemma 1 (Comparison Theorem). Let $0 \leq r_*(x) \leq r^*(x)$ on Γ . If the operator L_{r^*} is nonoscillatory on Γ , then the operator L_{r_*} is nonoscillatory as well. Conversely, if the operator L_{r_*} is oscillatory on Γ , then the operator L_{r^*} is oscillatory as well.

Lemma 2. Let $\lambda^0 > 0$ on Γ . If the operator $L_{\lambda^0} = L_0 + \lambda^0 I$ is critically nonoscillatory on Γ , then there exists a pair $a, b \in \partial\Gamma$ such that the number λ^0 is the smallest positive eigenvalue of the following spectral problem

$$\begin{aligned} L_0 u + \lambda u &= 0, \quad x \in \Gamma, \\ u|_{\partial\Gamma} &= (\partial u' - \beta u'')|_{\partial\Gamma \setminus \{a, b\}} = 0, \quad u'(b) = u''(b) = 0. \end{aligned}$$

Definition 3. The operator L_r is called *inverse-positive* if and only if for all $u \in D$ satisfying the boundary conditions (2)

$$L_r u \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \geq 0.$$

Denote by λ^0 a positive constant such that the operator $L_\lambda := L_0 + \lambda I$ is critically nonoscillatory on Γ . By λ_0 we denote the principal eigenvalue of the operator L_0 .

Theorem 1. Assume that the operator L_0 is nonoscillatory on Γ . Let $-\lambda_0 < r(x) \leq \lambda^0$, $x \in \Gamma \cup \partial\Gamma$. Then the operator L_r is inverse-positive.

Літэратура

1. Pokornyi, Yu. V., et al., *Differentsialnye uravneniya na geometricheskikh grafakh (Differential Equations on Geometric Graphs)*. Moscow, Fiz.-Mat. Lit. (2005).

2. Kulaev, R.Ch. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network / Kulaev, R.Ch., Urtaeva A.A. // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2023. 1–21.

3. Kiik, J.-C. On vertex conditions for elastic systems / Kiik, J.-C., Kurasov, P., Usman, M. // *Phys. Lett. A.* 2015. 379: 34–35. 1871–1876.

CLASSICAL SOLUTION OF THE SECOND MIXED PROBLEM FOR THE INHOMOGENEOUS LIOUVILLE EQUATION IN A HALF-STRIP

V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko (Minsk,

In the domain $Q = (0, \infty) \times (0, l)$, $l > 0$, of two independent variables $(t, x) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$, consider the nonlinear equation

$$\square_a u(t, x) + \lambda(t, x) \exp(bu(t, x)) = f(t, x), \quad (1)$$

where $\square_a = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$ is the d'Alembert operator, $a > 0$ and $b \neq 0$ are real numbers, λ and f are functions defined on the set \overline{Q} , and

$$b^{-1} \lambda(t, x) \geq 0, \quad b^{-1} \partial_t \lambda(t, x) \leq 0, \quad (t, x) \in \overline{Q}. \quad (2)$$

We supplement Eq. (1) with the initial conditions

$$u(0, x) = \varphi(0), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

and the boundary conditions

$$\partial_x u(0, t) = \partial_x u(l, t) = 0, \quad t \in [0, \infty). \quad (4)$$

Equation (1) is known as the *Liouville equation*. In the case $\lambda = \text{const}$ and $f \equiv 0$, it goes back to the work of J. Liouville [1], where its general solution on the plane was established. In theoretical physics, this equation is used as the equation of motion in Liouville field theory [2], finding applications in string theory, two-dimensional quantum gravity, and Calabi–Yau theory. Nonlinearity of the form $\exp(bu)$ also arises in the geometry of surfaces of constant curvature [3, p. 118] and the theory of integrable systems [4].

In paper [1], we considered the first mixed problem (Dirichlet conditions on the lateral boundaries) for Eq. (1) and established the necessary and sufficient matching conditions for the existence and uniqueness of a classical solution.

We formulate main results of this report.

Theorem 1. *Let the conditions $\varphi \in C^2([0, l])$, $\psi \in C^1([0, l])$, $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, and $f \in C^1(\overline{Q})$ be satisfied. The second mixed problem (1)–(4) has a unique solution $u: \overline{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the class $C^2(\overline{Q})$ if and only if conditions*

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = \varphi'(l) = \psi'(l) = 0,$$

are satisfied.

References

1. Liouville J. Sur l'équation aux différences partielles $d^2 \log \lambda / dudv \pm \lambda / 2a^2 = 0$ / J. Liouville // J. Math. Pures Appl. — 1853. — V. 18. — P. 71–72.
2. Nakayama Y. Liouville Field Theory: a Decade After the Revolution // Y. Nakayama // Int. J. Mod. Phys. A. — 2004. — V. 19, № 17n18. — P. 2771–2930.
3. Dubrovin B.A. Modern Geometry — Methods and Applications. Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields / B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko. — New York: Springer, 1984.
4. Ivanov E.A. Integrable Systems as Nonlinear Realizations of Infinite-Dimensional Symmetries: The Liouville Equation Example / E.A. Ivanov, S.O. Krivonos // Lett. Math. Phys. — 1984. — V. 8, № 1. — P. 39–45.
5. Korzyuk V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Inhomogeneous Liouville Equation in a Half-Strip / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Diff. Equat. — 2025. — V. 61, № 9. — P. 1337–1348.
6. Korzyuk V.I. Equations of Mathematical Physics / V.I. Korzyuk. — Moscow: Lenand, 2021.
7. Trenogin V.A. Functional Analysis / V.A. Trenogin. — Moscow: Fizmatlit, 2002.
8. Baranovskaya S.N. On the Classical Solution of the First Mixed Problem for a One-Dimensional Hyperbolic Equation / S.N. Baranovskaya. — Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation. — Minsk: BSU, 1991.
9. Baranovskaya S.N. Classical Solution of a Mixed Problem for a One-Dimensional Hyperbolic Equation / S.N. Baranovskaya // Differ. Equations. — 1991. — V. 27, № 6. — P. 1071–1073.

VARIATIONAL INEQUALITIES WITH DEGENERATE ANISOTROPIC COEFFICIENTS AND L^1 -DATA

A.A. Kovalevsky (Yekaterinburg, IMM UB RAS; Donetsk, IAMM)
alexkul71@mail.ru

We present some results on the solvability and properties of solutions of stationary variational inequalities with degenerate anisotropic coefficients and L^1 -data. In so doing, we discuss the results published in [1–3]

and our recent results on the subject concerning a special case for the constraint set which was not studied before.

Let Ω be a bounded open set in \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), and for every $i \in \{1, \dots, n\}$, let $q_i \in (1, n)$ and ν_i be a nonnegative function on Ω such that $\nu_i > 0$ a.e. in Ω , $\nu_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ and $(1/\nu_i)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega)$. We define $q = \{q_i : i = 1, \dots, n\}$ and $\nu = \{\nu_i : i = 1, \dots, n\}$ and denote by $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ the set of all functions $v \in L^1(\Omega)$ such that for every $i \in \{1, \dots, n\}$, there exists the weak derivative $D_i v$ and $\nu_i |D_i v|^{q_i} \in L^1(\Omega)$. The set $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ is a Banach space with the norm

$$\|v\|_{1,q,\nu} = \|v\|_{L^1(\Omega)} + \|\nu_i^{1/q_i} D_i v\|_{L^{q_i}(\Omega)}.$$

We denote by $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ the closure of $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{1,q}(\nu, \Omega)$. The set $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ is a reflexive Banach space with respect to the norm induced by the norm $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$.

For every $k > 0$, let T_k be the standard truncated function of level k . We denote by $\overset{\circ}{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$ the set of all functions $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that for every $k > 0$, we have $T_k(v) \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. We note that

$$\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega), \quad \overset{\circ}{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega) \setminus \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \neq \emptyset.$$

Using the functions T_k , for every function $v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$, the gradient $\delta v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ is defined.

Let $c_1, c_2 > 0$, let $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, $g_1, g_2 \geq 0$ in Ω , and for every $i \in \{1, \dots, n\}$, let $a_i: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be a Carathéodory function. We assume that for almost every $x \in \Omega$ and every $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (1/\nu_i)^{1/(q_i-1)}(x) |a_i(x, \xi)|^{q_i/(q_i-1)} &\leq c_1 \sum_{i=1}^n \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i} + g_1(x), \\ \sum_{i=1}^n a_i(x, \xi) \xi_i &\geq c_2 \sum_{i=1}^n \nu_i(x) |\xi_i|^{q_i} - g_2(x). \end{aligned}$$

In addition, we assume that the set of functions a_i satisfy the strict monotonicity condition.

We define $a = \{a_i : i = 1, \dots, n\}$ and for every $v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$, we denote by $\mathcal{M}_a(v)$ the set of all functions $w \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$ such that $k > 0, i \in \{1, \dots, n\} \implies a_i(x, \delta v) D_i T_k(w) \in L^1(\Omega)$.

Let $\mathcal{A} : \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \rightarrow (\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega))^*$ be the operator such that for every $v, w \in \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$,

$$\langle \mathcal{A}v, w \rangle = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla v) D_i w \right\} dx.$$

We consider variational inequalities corresponding to the triples (\mathcal{A}, V, f) and (a, V, f) , where V is a nonempty set in $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ or in $\overset{\circ}{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ and $f \in L^1(\Omega)$. In so doing, we distinguish the following cases.

1. Let V be a closed convex set in $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ such that $V \cap L^\infty(\Omega)$ is nonempty and

$$v, w \in V, k > 0 \implies v - T_k(v - w) \in V. \quad (1)$$

By definition, if $f \in L^1(\Omega)$, a T -solution of the variational inequality corresponding to the triple (\mathcal{A}, V, f) is a function $u \in \overset{\circ}{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ such that:

- (i) for every $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ and $k \geq 1$, we have $v - T_k(v - u) \in V$;
- (ii) if $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$, and $l = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, then

$$\langle \mathcal{A}T_l(u), T_k(u - v) \rangle \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx.$$

It was proved in [2] that for every function $f \in L^1(\Omega)$, there exists a unique T -solution of the variational inequality corresponding to the triple (\mathcal{A}, V, f) . The following result was established in [3].

Theorem 1. *Let $f \in L^1(\Omega)$. Then u is the T -solution of the variational inequality corresponding to the triple (\mathcal{A}, V, f) if and only if $u \in \overset{\circ}{T}^{1,q}(\nu, \Omega)$ and the following assertions hold:*

- (a) for every $v \in V$, we have $u - v \in \mathcal{M}_a(u)$;
- (b) for every $v \in V$ and every $k \geq 1$, we have $v - T_k(v - u) \in V$ and

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i T_k(u - v) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx. \quad (2)$$

2. Let V be a nonempty closed convex set in $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ satisfying only condition (1). In this case, for every $f \in L^1(\Omega)$ and $\psi \in V$, the existence and uniqueness of the so-called ψ -shift T -solution of the variational inequality corresponding to the triple (\mathcal{A}, V, f) was proved in [2]. Moreover, in [3], we established conditions on q and ν guaranteeing for every $f \in L^1(\Omega)$ the existence and uniqueness of the so-called $W^{1,1}$ -regular T -solution of the variational inequality corresponding to the triple (a, V, f) .

3. Let V be a set in $\overset{\circ}{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$ such that the set $V \cap L^\infty(\Omega)$ is nonempty. In this case, the set $V \cap \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ is also nonempty, and we assume that this set is convex and closed in $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. By the definition given in [3], if $f \in L^1(\Omega)$, a \mathcal{T} -solution of the variational inequality corresponding to the triple (a, V, f) is a function $u \in V$ such that: (i) for every $v \in V \cap \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, we have $u - v \in \mathcal{M}_a(u)$; (ii) for every $v \in V \cap \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ and every $k \geq 1$, inequality (2) holds. In [3], we established additional conditions on the set V guaranteeing for every $f \in L^1(\Omega)$ the existence and uniqueness of the \mathcal{T} -solution of the variational inequality corresponding to the triple (a, V, f) .

4. Let V be a set in $\overset{\circ}{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$ such that the set $V \cap \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ is nonempty, convex and closed in $\overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$. This case was not considered before. In the study of it, for $f \in L^1(\Omega)$ and $\psi \in V \cap \overset{\circ}{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$, we introduce the notion of ψ -shift \mathcal{T} -solution of the variational inequality corresponding to the triple (a, V, f) . Some results on the existence and properties of such solutions are given in the talk.

References

1. Kovalevsky A.A. Degenerate anisotropic variational inequalities with L^1 -data / A.A. Kovalevsky, Y.S. Gorban // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2007. — Vol. 345, № 8. — P. 441–444.
2. Kovalevsky A.A. On T -solutions of degenerate anisotropic elliptic variational inequalities with L^1 -data / A.A. Kovalevsky, Yu.S. Gorban // Izv. Math. — 2011. — Vol. 75, № 1. — P. 101–156.
3. Kovalevsky A.A. Toward the L^1 -theory of degenerate anisotropic elliptic variational inequalities / A.A. Kovalevsky // Proc. Steklov Inst. Math. — 2016. — Vol. 292, Suppl. 1. — P. S156–S172.

OF POWER FUNCTIONS IN HARDY AND BERGMAN SPACES

V.R. Misiuk (Grodno, GrSU)
misiuk@grsu.by

Denote by \mathcal{P}_n the collection of all algebraic polynomials of degree at most n . For a function f belonging to the Hardy space H_p ($0 < p \leq \infty$) on the unit disk $D = \{z : |z| < 1\}$, the best polynomial approximation is defined as

$$E_n(f)_p = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|_{H_p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

where $\|\cdot\|_{H_p}$ is the standard norm in H_p .

A classical result in polynomial approximation (a Jackson-type theorem) states that if $f^{(s)} \in H_p$ ($s \in \mathbb{N}$), then

$$E_n(f)_p \leq \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{H_p} \quad \text{for all } n \geq s,$$

with a constant $c > 0$ depending only on p and s .

Consider now the function $f_\alpha(z) = (1-z)^\alpha$, where $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, and the branch is chosen in $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$. Applying the above estimate, one obtains the weak asymptotic equivalence as $n \rightarrow \infty$:

$$E_n(f_\alpha)_p \approx n^{-\alpha - \frac{1}{p}}, \quad \alpha \in \left(-\frac{1}{p}, \infty\right) \setminus \mathbb{Z}.$$

Let $A_p = A_p(D)$ ($0 < p \leq \infty$) be the Bergman space of analytic functions in D with the quasi-norm $\|f\|_{A_p} = \|f\|_{L_p(D)}$ (a norm for $1 \leq p < \infty$) with respect to the planar Lebesgue measure:

$$\|f\|_{A_p} = \left(\int_D |f(\xi)|^p dm_2(\xi) \right)^{1/p} \quad (0 < p < \infty), \quad \|f\|_{A_\infty} = \sup_{\xi \in D} |f(\xi)|.$$

The best polynomial approximation in A_p is introduced analogously:

$$E_n(f)_{A_p} = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|_{A_p(D)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

An analogue of Jackson's theorem for the Bergman space was proved in [1]: if $f^{(s)} \in A_p(D)$ with $0 < p < \infty$, then

$$E_n(f)_{A_p} \leq \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{A_p}, \quad n = s, s+1, \dots,$$

where $c > 0$ is independent of f and n .

Consequently, for the power function f_α we obtain the weak equivalence

$$E_n(f_\alpha)_{A_p} \approx n^{-\alpha - \frac{2}{p}}, \quad \alpha \in \left(-\frac{2}{p}, \infty\right) \setminus \mathbb{Z}.$$

Various aspects of these relations and their applications were previously discussed by the author in [2].

Литература

1. Misiuk V.R. Theorems for the Best Polynomial Approximations in the Bergman Space / V.R. Misiuk // *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno*. — 2006. — No. 1. — P. 58–62.

2. Misiuk V.R. On the inverse theorem of the theory of rational approximations for Bergman spaces / V.R. Misiuk // *Problems of physics, mathematics and technics*. — 2010. — No. 1(2). — P. 34–37.

OPTIMIZATION LSTM MODEL USING FUNCTIONAL ANALYTICAL REGENERATION (FA) ALGORITHMS

M.A. Mohammed

(Moscow, Peoples' Friendship University of Russia)

1042225212@rudn.ru

Although the COVID-19 pandemic ended in 2023, the disease has not yet been completely eradicated. During the pandemic, numerous epidemiological models were studied and developed, ranging from traditional epidemiological models to deep learning techniques. These studies are crucial in predicting the spread of all types of infectious disease in communities, not just COVID-19, to limit their spread and plan their control when they occur. These modern studies also help health organizations mitigate the potential humanitarian disasters resulting from the rapid pace of global development. This report compares three mathematical models previously applied to COVID-19 data obtained from the Johns Hopkins University Center for Systems Science and Engineering [1] and the Our World in Data repository [2]:

- Functional Analytical Regeneration (FA) Model [3]
- Long Term Memory Neural Network (LSTM) Model [4]

- A hybrid model combining FA with transformer-based residual correction [5].

The aim is to obtain the best predictive model based on real-world, time-dependent data, which can then be used to predict other diseases such as seasonal influenza and others. A dataset from the Johns Hopkins University Center for Systems Science and Engineering [1], was used, specifically data on confirmed cases and deaths worldwide. We selected cases from a single country (Latvia) [2] and read the cumulative number of new cases daily. The seven-day average was then applied. The data was divided into three sequential sets (training, validation, and testing). Therefore, the final model variable is: the number of new confirmed cases (daily), represented by the seven-day moving average. This FA model [3] is based on the regeneration equation, modeling the dynamics of past infections as new infections. It includes the generation periods of transmission and the time-dependent reproduction rate (R_t) within those generations, drawing on epidemiological principles. This LSTM model [4] requires very large datasets to produce accurate results. We used data from the past sixty days to predict the next day. It employs logarithmic transformation to standardize the data. While it efficiently captures nonlinear data, it is less interpretable due to the lack of available data. However, this model was studied to compare it with machine learning and demonstrate its effectiveness when data is limited. This model combines the first model with a model trained on subtracting the expected value from the actual value [5] to learn from and analyze the error. This is called a Transformer trained on residuals. This method improves the model's flexibility while maintaining its error-correction capabilities. Thus, the Transformer predicts the same error and corrects the prediction. The key point is that this hybrid model doesn't predict from scratch; rather, it corrects the error of the initial FA model. To analyze the results, the evaluation criteria will be as follows:

- Mean Absolute Error (MAE)
- Root Mean Squared Error (RMSE)
- Mean Absolute Percentage Error (MAPE)
- Symmetric Mean Absolute Percentage Error (sMAPE)

From lowest performance to best performance.

Таблица 1: Validation Results

Model	MAE	RMSE	MAPE (%)	SMAPE (%)
FA	70.53	93.26	9.21	8.99
LSTM	69.68	96.75	8.62	9.02
HYB	65.00	85.63	8.73	8.63

Таблица 2: Test Results

Model	MAE	RMSE	MAPE (%)	SMAPE (%)
FA	14.77	26.98	11.50	11.25
LSTM	17.58	28.72	17.91	15.53
HYB	14.80	27.05	11.59	11.16

Литература

1. Johns Hopkins University Center for Systems Science and Engineering (JHU CSSE), COVID-19 Data Repository
2. Our World in Data. Coronavirus (COVID-19) Dataset <https://ourworldindata.org/coronavirus>
3. A. Cori et al. A New Framework and Software to Estimate Time-Varying Reproduction Numbers During Epidemics/ A. Cori 2013
4. S. Hochreiter. Long Short-Term Memory./ S. Hochreiter, J. Schmidhuber 1997
5. A. Vaswani et al. Attention Is All You Need / A. Vaswani — 2017
6. Hyndman R. Another Look at Measures of Forecast Accuracy / R. Hyndman, Koehler A. — 2006

ON SOME GENERALIZATIONS OF INTEGRAL INEQUALITIES FOR QUASIMONOTONE FUNCTIONS IN WEIGHTED VARIABLE EXPONENT LEBESGUE SPACES

A. Senouci (Department of Mathematics, Laboratory of Informatics and Mathematics, University of Tiaret, Algeria)
kamer295@yahoo.fr

The objective of this work is to generalize some results obtained by A. Senouci et al. for weighted Hardy operators by introducing a parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Moreover, by using the quasi-norms $\|f\|_{L_{p(x)}^{BT}(\Omega)}$, we obtain an improvement of constants in our previous estimates.

Many investigations are devoted to the problem of boundedness of the Hardy operator in the Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ for $p(x) \geq 1$. However, investigations of the Hardy inequality in the variable exponent Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ for $0 < p(x) < 1$ are much less known.

Let \mathbb{R}^n be the n -dimensional Euclidean space of points $x=(x_1, \dots, x_n)$, Ω be a Lebesgue measurable subset of \mathbb{R}^n . Suppose that p is a Lebesgue measurable function on Ω such that $0 < p(x) \leq \infty \forall x \in \Omega$, and ω is a weight function, that is a positive Lebesgue measurable function on Ω .

Definition 1. Let p be a Lebesgue measurable function, $0 < p(x) < \infty$ for all $x \in \Omega$. By $L_{p(x), \omega(x)}(\Omega)$ we denote the set of all Lebesgue measurable functions f on Ω such that

$$\rho_{p(x), \omega(x)}(f) = \int_{\Omega} (|f(x)|\omega(x))^{p(x)} dx < \infty.$$

Note that the expression

$$\|f\|_{L_{p(x), \omega(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda > 0; \int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|\omega(x)}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq 1\} \quad (1)$$

defines a quasi-norm on $L_{p(x), \omega(x)}(\Omega)$. $L_{p(x), \omega(x)}(\Omega)$ is a quasi-Banach space equipped with this quasi-norm (see [4]).

In Definition 1, the case $p(x) = \infty$ is not considered. In definition given in [3], this case is included, where the quasi-norms are denoted by $\|f\|_{L_{p(x)}^{BT}(\Omega)}$ (norm if $p(x) \geq 1$). We shall use the quasi-norm based on the definition given in [3].

Definition 3. [2]. We say that a non-negative function f is quasimonotone on $]0, \infty[$, if for some real number α , $x^\alpha f(x)$ is a decreasing or an increasing function of x . More precisely, given $\beta \in \mathbb{R}$, we say that $f \in Q_\beta$ if only if $x^{-\beta} f(x)$ is non-increasing and $f \in Q^\beta$ if only if $x^{-\beta} f(x)$ is non-decreasing.

Theorem 1. [3]. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a Lebesgue measurable set; $p, q : \Omega \rightarrow (0, \infty]$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Lebesgue measurable functions, such that

- 1) for all $x \in \Omega$ $0 < p(x) \leq q(x) \leq \infty$;
- 2) $r(x) = \frac{p(x)q(x)}{q(x)-p(x)}$, if $p(x) < q(x) < \infty$, $r(x) = p(x)$, if $p(x) < q(x) = \infty$, and $r(x) = \infty$, if $p(x) = q(x)$;
- 3) $m = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} \frac{p(x)}{q(x)}$, $M = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \frac{p(x)}{q(x)}$, $\underline{p} = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x)$.

If $\underline{p} > 0$, then

$$\|fg\|_{L_{p(x)}^{BT}(\Omega)} \leq (1 + M - m)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_{q(x)}^{BT}(\Omega)} \|g\|_{L_{r(x)}^{BT}(\Omega)} \quad (2)$$

for all $f \in L_{q(x)}^{BT}(\Omega)$ and $g \in L_{r(x)}^{BT}(\Omega)$.

Consider the weighted Hardy operators

$$H_{\omega,\alpha} = \frac{1}{W(x)} \int_0^x f(y)y^{-\alpha}\omega(y)dy, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$(H_{\omega,\alpha}^*f)(x) = \frac{1}{W(x)} \int_x^\infty f(y)y^{-\alpha}\omega(y)dy,$$

where $W(x) = \int_0^x y^{-\alpha}\omega(y)dy$, $y > 0$, f is a non-negative Lebesgue measurable function on $(0, \infty)$, ω is a weight function on $(0, \infty)$ and $\alpha \in \mathbb{R}$.

Note that for $\omega(y) \equiv 1$, and $\alpha = 0$, the $H_{\omega,\alpha}$ and $H_{\omega,\alpha}^*$ are the usual Hardy operators H and H^* .

Theorem 2. [6]. Let p, q be Lebesgue measurable functions on $(0, \infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q} < 1$, $r(x) = \frac{pp(x)}{p(x)-p}$, for $x \in (0, \infty)$, $\beta > -1$, $f \in Q_\beta$, $\alpha \in \mathbb{R}$ and $\omega \in Q^\alpha$. Suppose that ω_1 and ω_2 are weight functions defined on $(0, \infty)$.

Then, the inequality

$$\|H_{\omega,\alpha}f\|_{L_{q(x),\omega_2(x)}(0,\infty)} \leq \underline{p}^{\frac{1}{2}}(\beta+1)^{-\frac{1}{p'}} C_{p,q}(1+M-m)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left\| \frac{y^{\frac{1}{p'}} \|\frac{\omega_2(x)\omega(x)}{x^\alpha W(x)}\|_{L_{q(x)}(y,\infty)}}{\omega_1(x)} \right\|_{L_{r(x)}(0,\infty)}^{BT} \|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)} \quad (3)$$

holds, where $C_{p,q}$, M and m are the constants in [1] and Theorem 1, respectively.

Remark 2. Note that $(1+M-m)^{\frac{1}{2}} < d_p$. Since, under the assumptions of Theorem 3.1, $\|f\|_{L_{p(x)}^{BT}(\Omega)} = \|f\|_{L_{p(x)}(\Omega)}$, if we take $\alpha = 0$, $\omega(x) = 1$ in inequality (3), we get Theorem 3.1 of [5] with an improved constant. Moreover, by putting $\beta = 0$, we get Theorem 3.1 of [2].

Theorem 3. [6]. Let p, q Lebesgue be measurable functions on $(0, \infty)$, $0 < \underline{p} \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q} < 1$, $r(x) = \frac{pp(x)}{p(x)-p}$, for $x \in (0, \infty)$, $\beta > -1$, $f \in Q^\beta$, $\alpha \in \mathbb{R}$, and $\omega \in Q^\alpha$. Suppose that ω_1, ω_2 are weight functions defined on $(0, \infty)$.

Then, the inequality

$$\|H_{\omega,\alpha}f\|_{L_{q(x),\omega_2}(0,\infty)} \leq \underline{p}^{\frac{1}{2}}(\beta+1)^{-\frac{1}{p'}} C_{p,q}(1+M-m)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left\| \frac{[y^{-\beta}(x^{\beta+1}-y^{\beta+1})]^{\frac{1}{p'}} \|\frac{\omega_2(x)\omega(x)}{x^\alpha W(x)}\|_{L_{q(x)}(y,\infty)}}{\omega_1(x)} \right\|_{L_{r(x)}(0,\infty)}^{BT} \|f\|_{L_{p(x),\omega_1(x)}(0,\infty)} \quad (4)$$

holds, where $C_{p,q}$ and M, m are the constants in Theorem 3.1.

Remark 3. If we take $\alpha = 0$, $\omega(x) = 1$ in inequality (4), we get Theorem 3.3 of [5], with an improved constant. Moreover, by putting $\beta = 0$, we get Theorem 3.2 of [2].

References

1. Bandaliev R.A., On Hardy-type inequalities in weighted variable exponent Lebesgue spaces for $0 < p < 1$ / R.A. Bandaliev — Eurasian Math. Journal, 2013, — V. 4, No. 4. — P. 5-16.
2. Bergh J. Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasimonotone functions / J. Bergh, V.I. Burenkov, L.-E. Persson — Acta Sci. Math. (Szeged), 1994, — V. 59. — P. 223-241.
3. Burenkov V.I. About Hölder's inequality in Lebesgue spaces with variable summability / V.I. Burenkov, T.V. Tararykova — Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, 2021, — V. 67, No. 3. — P. 472-482 (in Russian).
4. Samko S.G., Differentiation and integration of variable order and the variable exponent Lebesgue spaces / S.G. Samko — Proc. Inter. Conf. «Operator theory for complex and hypercomplex analysis», Mexico, 1994, Contemp. Math., 1998, — V. 212. — P. 203-219.
5. Senouci A. Some integral inequalities for quasi-monotone functions in weighted variable exponent Lebesgue spaces with $0 < p(x) < 1$ / A. Senouci, A. Zanou — Eurasian Math. Journal, 2020, — V. 4, No. 4. — P. 58-65.
6. Sofrani M. Generalizations of Hardy-type integral inequalities for quasimonotone functions in weighted variable exponent Lebesgue spaces / M. Sofrani, A. Senouci — Eurasian Math. Journal, 2026, — V. 17, N. 1. — P. 91-99.

INVARIANCE OF LEVELS $A(z)$ -LEMNISCATES

N.M. Zhabborov¹, **B.E. Husenov**² (¹Tashkent, Tashkent State University of Economics, ²Bukhara, Bukhara State University)
¹*zjhabborovnasridin@gmail.com*, ²*b.e.husenov@buxdu.uz*

Let $\Omega \subset \mathbb{C}$. A function $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ is called $A(z)$ -analytic (or quasiconformally analytic) in a domain Ω if it satisfies the Beltrami equation of the following form:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = A(z) \frac{\partial F}{\partial z}, \quad |A(z)| \leq k < 1. \quad (1)$$

Here, $A(z)$ is a measurable function called the coefficient of anisotropy, and F is an $A(z)$ -analytic function in the sense of Vekua [2].

If $A(z) \equiv 0$, then F is a holomorphic function; if $A(z) \neq 0$, then F is a quasiconformal mapping with a local dilatation coefficient:

$$K(z) = \frac{1 + |A(z)|}{1 - |A(z)|}. \quad (2)$$

The metric consistent with the deformation has the form

$$ds_A^2 = \frac{|dz|^2}{1 - |A(z)|^2}, \quad (3)$$

defining a locally elliptic geometry that depends on the function $A(z)$.

Let F be an $A(z)$ -analytic function in a simply connected domain Ω . Then the $A(z)$ -lemniscate is defined as the set

$$\Omega_A = \{z \in \mathbb{C} : |F(z)| < 1\}, \quad (4)$$

and its boundary as the level line

$$\Gamma_A = \{z \in \mathbb{C} : |F(z)| = 1\}. \quad (5)$$

The boundary of the domain Γ_A represents a deformed level line of the modulus of the function $F(z)$. For $A(z) = 0$, we obtain the classical lemniscate. If the function F is continuous and open, then the domain Ω_A is simply connected, bounded, and smooth.

An $A(z)$ -automorphism of a lemniscate is an $A(z)$ -analytic mapping $f : \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ that satisfies the following conditions:

1. It satisfies equation

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z) \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (6)$$

2. There exists a $\theta \in \mathbb{R}$ such that the condition

$$F(f(z)) = e^{i\theta} F(z), \quad (7)$$

holds.

3. F is a homeomorphism of the domain Ω_A onto itself. It preserves both the level sets of the function $|F(z)| = \text{const}$ and the deformation structure defined by the function $A(z)$.

The set of all such mappings is denoted by

$$\text{Aut}_A(\Omega_A) = \{f : \Omega_A \rightarrow \Omega_A\}. \quad (8)$$

By the definition of Ω_A and by the continuity of $F(z)$ on the set $\bar{\Omega}$ we obtain

$$\partial\Omega_A = \{z \in \bar{\Omega} : |F(z)| = 1\}.$$

Theorem 1 (invariance of levels). *Let $F(z)$ be an $A(z)$ -analytic function in a domain satisfying the Beltrami equation (1) and let $f : \Omega_A \rightarrow \Omega_A$ be an $A(z)$ -automorphism, i.e., (6) and (7) are satisfied. Then, for all $z \in \Omega_A$ the equality*

$$|F(f(z))| = |F(z)|, \quad (7)$$

holds, and hence $\{|F| = c\}$ preserves every level line of the function f (for any level value $0 < c < 1$) and, in particular, the boundary of the domain $\partial\Omega_A = \{|F(z)| = 1\}$.

References

1. Ahlfors L.V. Lectures on Quasiconformal Mappings. — Princeton University Press, 1966. — 146 c.
2. Vekua I.N. Generalized analytical functions. — M. : Nauka, 1988. — 512 c.
3. Sadullaev A. On a Class of A -Analytic Functions / A. Sadullaev, N.M. Jabborov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. — Krasnoyarsk. — 2016. — Vol. 9, issue 3. — p. 374–383.

Именной указатель

- Абдуллова А.Ф., 28
Ахматов А.А., 52
Акишев Г., 29
Алиев З.С., 31
Алпамысов Д., 33
Амосов А.А., 35
Андрианова А.А., 28, 33, 37
Антонов Н.А., 38
Аралов А.В., 41
Артисевич А.Е., 43
Артёмов А.Ю., 283
Асадов Т.Б., 31
Асхабов С.Н., 50
Асташова И.В., 45, 47
Бабошин С.Д., 54
Барабаш О.П., 58
Барышева И.В., 314
Баскаков А.Г., 60, 62
Баззаев А.К., 56
Белаш К.В., 64
Бердников С.Н., 295
Бычков Е.В., 81
Бирюков А.М., 66
Богатов Е.М., 67
Бондарев А.С., 69
Боревич Е.З., 71
Бортников А.А., 72
Бухонов Д. А., 79
Бухонов Д.А., 169
Буксаева Л.З., 173
Булатов Ю.Н., 74
Булинская Е.В., 76
Буранов Ж.И., 52
Бутерин С.А., 77
Цахоев Г.С., 325
Царьков И.Г., 322
Цехан О.Б., 327
Черепова М.Ф., 207
Чэн Хань, 88, 334
Чэн Ш., 336
Чистякова Е.В., 281
Чистяков В.Ф., 281
Чунг Л.Х., 253
Чунжук Е.А., 330
Чураков Е.М., 332
Чжао Вэньсинь, 329
Чжицян Ли, 225
Чжусюань Сюн, 225
Даник Ю.Э., 97
Демченко М.Н., 100
Дмитриев М.Г., 97
Добрынина И.В., 104
Дородный М.А., 106
Дорофеева И.Н., 257
Доронин А. К., 108
Дубинский Ю.А., 110
Джабраилов А.Л., 102
Джафарова С.И., 133
Джонга Т.Л., 62
Егорова А.Ю., 112
Фармонов Ш.Р., 142
Федулов Д. Д., 302

Филиновский А.В., 47
Фомин В.И., 304, 310
Фролкина О.Д., 312
Фролова Е.В., 314
Фролов Д.Г., 167
Габдрахманова Н.Т., 91
Гандилян В.В., 93
Гаркавенко Г.В., 60
Гоцоев С., 96
Голубцов П.В., 332
Горелов В.А., 95
Хацкевич В.Л., 317
Хамидуллин А.М., 37
Харитоновна Е.Н., 316
Харитоновна С.В., 260
Хусанов Д.Х., 52
Илолов М.И., 128
Исмаилов М.И., 133
Иванова М.С., 126
Кабанко М.В., 135
Кабина Е.Н., 137
Кадченко С.И., 139, 141
Калитвин В.А., 193
Каплиева Н.А., 317
Карамышев А.В., 218
Каримов К.Т., 142
Кыров В.А., 176
Кокурин М.Ю., 145
Колесникова И.В., 147
Коненков А.Н., 112
Коробко Е.В., 153
Коровина М.В., 155
Корзюк В.И., 151
Костенко Е.И., 161
Костерин Д.С., 163
Костина Л.Н., 60
Костина Т.И., 54
Костин Д.В., 54, 164
Костин В.А., 164
Козловская И.С., 151
Крымов Н.Е., 35
Куликов А.Н., 167
Куликов Д.А., 167
Кунаковская О.В., 137, 169
Курбанов В.М., 173
Кузнецова Н.Н., 317
Кузнецов А.В., 165
Лашин Д.А., 47
Лашкарбеков С.М., 128
Левашова Н.Т., 88, 178, 329
Лыу Т.Х., 189
Литвинова К.В., 179
Литвинов В.Л., 179
Лобанова Н.И., 180
Лобода Н.А., 183
Ломовцев Ф.Е., 185
Лопухинский О.Ю., 187
Ляхов Л.Н., 190, 193
Махмудов А.Р., 222, 224
Махмудов К.О., 205
Макаров К.Н., 274
Макин А.С., 195
Максимова Е.А., 197
Малютин А.Р., 169, 199
Маслов Д.А., 201
Матлашова А.М., 203
Михайличенко И.В., 207
Морозов А.В., 169, 209
Муджтаба Явар, 83
Мухамадиев Э.М., 342
Муравник А.Б., 116
Насирова Л.В., 211
Наумова О.А., 135
Нечепоренко А.Р., 215
Нестеров А.В., 213
Никишов В.А., 219
Никулин Е.И., 218
Нитунга П., 220
Нуриева С.А., 133
Нуров И.Дж., 342

Орлова Н.Р., 227
Орлов А.О., 222, 224, 225
Пахмутов Д.А., 145
Пархоменко В.Е., 229
Пастухова С.Е., 234
Пастухов М.С., 231
Пашкова В.С., 237
Переходцева Э.В., 241
Перескоков А.В., 238
Петросян Г.Г., 244
Пискарев С.И., 245
Половинкин И.П., 58
Поздняков А.А., 247
Прокопенко О.Д., 251
Провоторова Л.В., 249
Прядиев В.Л., 209
Раецкая Е.В., 124, 253
Рахматов Дж.Ш., 128
Райцин А.М., 255
Расулов А.Б., 257
Рыхлов В.С., 231, 261
Рощупкин С.А., 193
Рунг Е.В., 258
Рустанов А.Р., 260
Рязанова Л.С., 139, 141
Сабитов К.Б., 265
Сафонова Т.А., 272
Сакбаев В.Ж., 268
Савин А.Ю., 227
Седых И.А., 274
Сейидзаде Р.Б., 277
Селютин В.Д., 180
Сергеева А.М., 295
Сергеев И.Н., 279
Сидоров Д.Н., 281
Силаева М.Н., 164
Смирнов В.Ю., 155, 283
Солиев Ю.С., 285
Сорока М.С., 287
Сташ А.Х., 43, 183
Стенюхин Л.В., 72
Степанов А.В., 289
Струков М.И., 290
Сухочева Л.И., 292
Свиридюк Г.А., 81
Шабров С.А., 119
Шамолин М.В., 337
Шананин Н.А., 340
Шарифзода Э.И., 342
Шелковой А.Н., 344
Шишкина Э.Л., 345
Шляхтер А.Д., 347
Шорохов С.Г., 348
Тарасова А.С., 83
Ташпулатов С.М., 293
Тырсин А.Н., 297
Тихонова Е.В., 295
Трусова Н.И., 314
Турсунмуродова У.Х., 205
Ускова Н.Б., 60
Усков Д.Г., 300
Усков В.И., 298
Васильев В.Б., 83
Вэй Юйсюань, 88, 334
Виситаева М. Б., 85
Волков В.Т., 225
Якивчик Н.В., 350
Задорожная Н.С., 115
Зайцева Н.В., 116
Загора Д.А., 117
Замышляева А.А., 81
Завьялова Т.В., 113
Зизов В.С., 122, 215
Золин Л.В., 241
Зубков П.В., 110
Зубова С.П., 124
Зверева М.Б., 120
Зверев А.А., 119
Звягин А.В., 161, 290, 316

Alili V.G., 352

Eloeva V.A., 354

Husenov B.E., 368

Korzyuk V.I., 357

Kovalevsky A.A., 358

Kulaev R.Ch., 354

Misiuk V.R., 362

Mohammed M.A., 363

Rudzko J.V., 357

Senouci A., 365

Zhabborov N.M., 368

Н а у ч н о е и з д а н и е

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ
ЧТЕНИЯ – XXXVII**

**Материалы
Международной
Воронежской весенней математической школы
(30 апреля – 4 мая 2026 г.)**

Под редакцией М. Ш. Бурлуцкой

Верстка и подготовка оригинал-макета
Д. Э. Кондаурова

Подписано в печать 15.05.2026. Формат 60×84/16.
Усл. п. л. 23,0. Уч. изд. л. 19,7. Тираж 25 экз. Заказ 104

Издательский дом ВГУ
394018 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательского дома ВГУ
394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3